① Die 'Symmetrische Gruppe' S_n aller Permutationen einer n-Elementigen Menge.

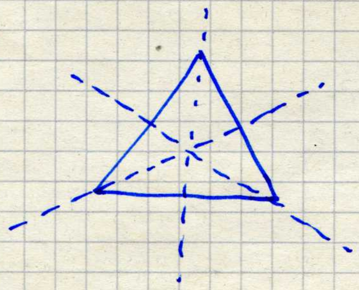
zB. $S_3 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

a) Gruppentafel

b) Wie viele Elemente hat S_4, S_5, S_n ??

c) Die 'zyklischen Vertauschungen' bilden selber auch schon eine Gruppe, die man C_n schreibt.

② Die Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks (sog. Dieder-Gruppe D_n)

D_3 :  hat 6 Elemente !?

a) Gruppentafel für D_3

b) $D_3 \cong S_3$!

c) $D_4 \ncong S_4$!!

d) $C_n \subset D_n$, wie vorher $C_n \subset S_n$

e) Wie steht es mit der ~~Symmetrie~~ Kommutativität von C_n und D_n ?

③ Die Symmetriegruppe eines beliebigen endlichen Polyeders.

a) 'Zündholzschachtel' ~ Quader

b) quadratisches Bauklötzli

c) Tetraeder

d) n-seitige reguläre Pyramide

e) !! Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder !!

(4) Kristallographische Gruppen

a) Bänder und Tapeten

b) Balken, Schichten, Raumgruppen

c) 4d-Symmetriegruppen, Farbgruppen, ...

d) kristallographische Punktgruppen

$\Longrightarrow$ viele Maturarbeiten sind hier möglich.

nur als Überblick / Intro präsentieren. Buch von Weyl!

(5) Die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$.
Ist sie 'isomorph' zu C_4 oder zu D_2 ??

(6) Die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$ $\cancel{\mathbb{P}_n}$ $= \{ x \in \mathbb{Z}_n \mid x \neq 0 \text{ und } ggT(x,n) = 1 \}$

a) Vergleiche $\cancel{\mathbb{P}_{10}}$ $\mathbb{Z}_{10}^*$ und $\cancel{(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)}$ $\mathbb{Z}_5^*$

b) Sind $\mathbb{Z}_{15}^*$ und $\mathbb{Z}_{16}^*$ isomorph?

c) Wie steht es mit $\mathbb{Z}_{20}^*$ und $\mathbb{Z}_{24}^*$?

d) Können Sie jeweils eine isomorphe Symmetriegruppe eines geometrischen Körpers angeben ??

Bemerkung: Die 'Gruppentheorie' ist eine der zentralen Theorien der höheren Algebra.
Da Symmetrien auch in der Physik und in der Chemie eine grosse Rolle spielen, befasst man sich oft auch dort mit gruppentheoretischen Problemen.
Die Vorlesungen 'Algebra I–III' an den Hochschulen bringen hauptsächlich eine Theorie der Gruppen, Ringe und Körper.

② a) Tabelle zur Addition in $\mathbb{Z}_{10}$

b) Tabelle zur Multiplikation in $\mathbb{Z}_{10}$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	✓
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	✓
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6	
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4	
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3	✓
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2	
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	✓

! Nullteiler $\Leftrightarrow$ kein Inverses $\Leftrightarrow$ 1 nicht in Zeile $\Leftrightarrow$ einige doppelt

<u>kein</u> Nullteiler $\Leftrightarrow$ hat Inverses $\Leftrightarrow$ 1 ist in Zeile $\Leftrightarrow$ alle verschieden!

(5) $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$C_4 = \{id, d_{90°}, d_{180°}, d_{270°}\}$

	id	$d_{90°}$	$d_{180°}$	$d_{270°}$
id	id	d_{90}	d_{180}	d_{270}
d_{90}	d_{90}	d_{180}	d_{270}	id
d_{180}	d_{180}	d_{270}	id	d_{90}
d_{270}	d_{270}	id	$d_{90°}$	d_{180}

$D_2 = \{id, 2_z, m_z, \bar{1}\}$

	id	2_z	m_z	$\bar{1}$
id	id	2_z	m_z	$\bar{1}$
2_z	2_z	1	$\bar{1}$	m_z
m_z	m_z	$\bar{1}$	1	2_z
$\bar{1}$	$\bar{1}$	m_z	2_z	1

- D_2 ist <u>anders</u> als $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ und $(C_4, \circ)$: Jedes Element wird quadriert zu 1 (lauter 'Involutionen').

- $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$ und $(C_4, \circ)$ sind isomorph:

$$1 \longleftrightarrow id$$
$$2 \longleftrightarrow d_{90}$$
$$2^2 = 4 \longleftrightarrow d_{180}$$
$$2^3 = 2 \cdot 4 = 3 \longleftrightarrow d_{270°}$$

	1	2	4	3
1	1	2	4	3
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	3	1	2	4

Mit dieser Bijektion stimmen auch die Gruppentafeln völlig überein !!

(6) a) und b) dran, c) und d) streichen !!

⑥ a) $\mathbb{P}_{10} = \{1, 3, 7, 9\}$

	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$		$\mathbb{P}_{10}$
1	$\longleftrightarrow$	1
2	$\longleftrightarrow$	3
3	$\longleftrightarrow$	7
4	$\longleftrightarrow$	9

Isomorphismus !!

$= C_4$ (Drehungen um Vielfache von 90°)