

Aufgabe 1161 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Elemente von

$$\mathbb{P}_n = \{x | x \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\} \text{ mit } \text{ggT}(x, n) = 1\}$$

bilden bekanntlich bezüglich der Multiplikation modulo n eine kommutative Gruppe, die sogenannte prime Restklassengruppe modulo n . Sind $\mathbb{P}_{15}$ und $\mathbb{P}_{16}$ isomorph? Wie steht es mit $\mathbb{P}_{20}$ und $\mathbb{P}_{24}$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Elem. Math. 55 (2000) 128-131

Zur Notation: $\mathbb{P}_n = \mathbb{Z}_n^*$

Aufgaben:

- Welche der Gruppen $\mathbb{P}_{15}$, $\mathbb{P}_{16}$, $\mathbb{P}_{20}$ und $\mathbb{P}_{24}$ sind isomorph zueinander??
- Können Sie einen Gegenstand zeichnen oder basteln, dessen Symmetriegruppe isomorph ist zu $\mathbb{P}_{15}$?

Tips zu den Aufgaben:

- Erstellen Sie Listen der Elemente der 4 Gruppen.
Welche Gruppen haben gleich viele Elemente?
- Studieren Sie die Teilmenge aller Quadrate von Gruppen-
elementen!

$$IP_{15} = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$$

$$IP_{16} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$IP_{20} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

$$IP_{24} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$$

alle haben 8 Elemente!

$$(IP_{15})^2 = \{1, 4, 1, 4, 4, 1, 4, 1\} = \{1, 4\}$$

$$(IP_{16})^2 = \{1, 9, 9, 1, 1, 9, 9, 1\} = \{1, 9\}$$

$$(IP_{20})^2 = \{1, 9, 9, 1, 1, 9, 9, 1\} = \{1, 9\}$$

$$(IP_{24})^2 = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} = \{1\}$$

!

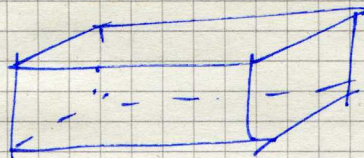
$\Rightarrow IP_{24}$ ist nicht isomorph zu einer der anderen 3 Gruppen.

Ergebnis der Aufgabe:

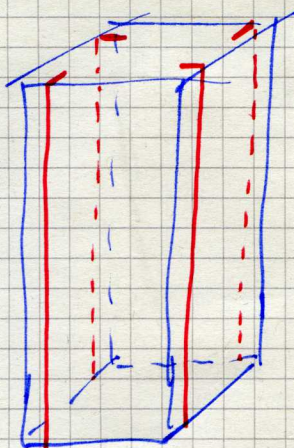
- $IP_{15} \cong IP_{16} \cong IP_{20} \cong \frac{4}{m}$

- $IP_{24} \cong \frac{2}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$

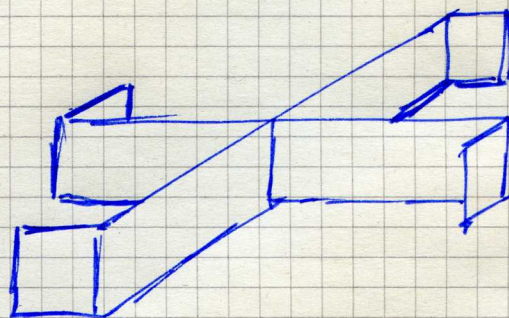
$\frac{2}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$ ist die kristallographische Schreibweise der Symmetriegruppe eines Quaders. Alle Symmetrielemente sind Involutionen.



$\frac{4}{m}$ ist die kristallographische Schreibweise der Symmetriegruppe der folgenden beiden Beispiel-Körper:



Quadratischer Prisma
mit 4 eingefrästen
Rillen



Das ist ein unsymmetrisches
Flügelrad mit 4 Flügeln

Es gibt solche Windräder
für Kinder!