

Die allgemeine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten

Viele alte und einige neue Ergebnisse zu einem „klassischen“ Thema

1. Bemerkungen zum Begriff des Kegelschnitts
2. Die Definitionen
3. Die Resultate
4. Zur Korrektheit der Fallunterscheidungen
5. Die Details im parabolischen Fall
6. Die Details im elliptischen Fall
7. Die Details im hyperbolischen Fall
8. Visualisierung und Kontrolle mit GeoGebra
9. Übersichtstabellen für die 15 Fälle

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$p = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}}$$

Version 1.2 vom Februar 2016

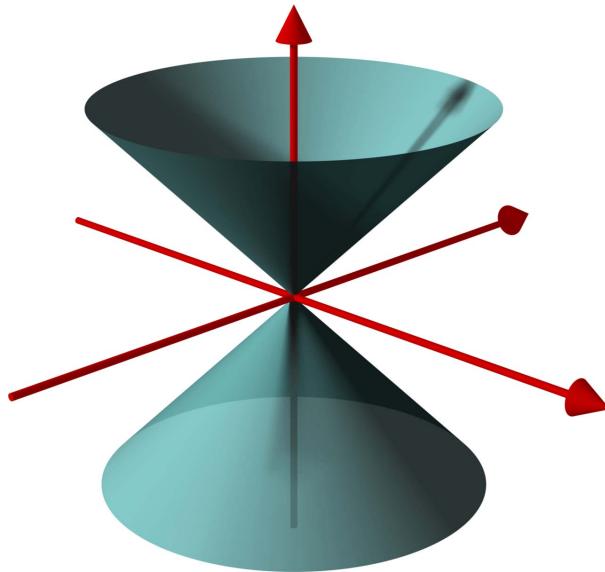
Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, im April 2015 und im Januar 2016

Mit L^AT_EX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp, Bergün, im Winter 2015 / 2016

Publiziert unter der 'creative commons' Lizenz CC BY-SA 4.0

1 Bemerkungen zum Begriff des Kegelschnitts

Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ist ein Doppelkegel mit der Spitze im Nullpunkt und der z -Achse als Rotationsachse:



Schneiden wir diesen Doppelkegel mit einer beliebigen Ebene E

$$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

so können wir zwei Fälle unterscheiden: $d = 0$ oder $d \neq 0$.

Fall $d = 0$: Die Ebene geht durch den Nullpunkt, also durch die Spitze des Doppelkegels, und als Schnittmenge ergibt sich ein Punkt, eine Mantellinie oder ein Paar von Mantellinien, die sich im Nullpunkt schneiden.

Fall $d \neq 0$: Die Ebene schneidet die z -Achse in $Q \neq O$ oder sie ist parallel zur z -Achse. Die Schnittkurve ist ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel.

Alle diese *Kegelschnitte* lassen sich als Lösungsmengen einer quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten beschreiben:

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + 2 \cdot D \cdot x + 2 \cdot E \cdot y + F = 0$$

Die Umkehrung ist aber falsch: Nicht alle Lösungen einer solchen Gleichung entsprechen einem Kegelschnitt! Dies ist ein erster Anlass zur Verwirrung, da oft alle Lösungen einfach als Kegelschnitte bezeichnet werden.

Betrachten wir die folgenden Beispiele:

- $x^2 + y^2 = -1$ Die Lösungsmenge ist leer
- $x^2 = 1$ Lösungsmenge ist ein Paar paralleler Geraden ($x = \pm 1$, y ist beliebig)

Diese Lösungsmengen lassen sich geometrisch nicht als Kegelschnitt realisieren, und es ist auch nicht sinnvoll, sie als „entartete Kegelschnitte“ zu bezeichnen.

Wenn wir alle Lösungen geometrisch interpretieren wollen, müssen wir weitere Flächen zulassen, die dann von einer Ebene geschnitten werden.

Betrachten wir zwei Geraden g und h im Raum, die sich unter einem spitzen Winkel schneiden. Lassen wir h um g rotieren, so entsteht ein **Doppelkegel**. Die möglichen ebenen Schnitte haben wir oben beschrieben.

Sind die beiden Geraden parallel, so entsteht bei der Rotation von h um g ein **Zylinder**. Schneiden wir diesen Zylinder mit einer Ebene, so entsteht ein Kreis, eine Ellipse, zwei parallele Geraden, eine Gerade oder die leere Menge. Damit sind fast alle Lösungen abgedeckt, wenn die Gleichung wirklich quadratisch ist, wenn also nicht A , B und C gleichzeitig null sind.

Einen einzigen Fall erreichen wir so nicht: Die Lösungsmenge kann auch leer sein, wenn die Determinanten, die wir noch definieren werden, beide verschieden sind von null. Wir müssen daher auch noch die **Kugel** als Fläche zulassen, die wir mit einer Ebene schneiden. Das gibt dann Kreise, einen einzelnen Punkt oder eben die leere Menge. Anstelle der Kugeln könnten wir auch allgemeiner **Ellipsoide** zulassen.

Die weiteren Kapitel dieser Arbeit werden zeigen, dass der folgende Satz gilt:

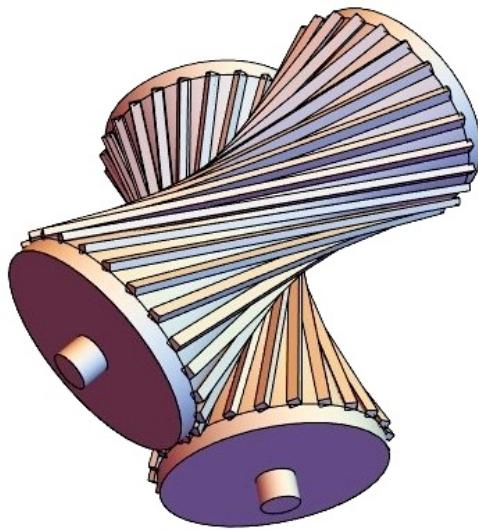
„Die Lösungen einer echt quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten lassen sich geometrisch immer als Schnitt eines Doppelkegels, eines Kreiszylinders oder einer Kugel mit der xy -Ebene realisieren. Ist die Lösungsmenge nicht leer, so lässt sie sich immer als Kegelschnitt oder als Zylinderschnitt realisieren.“

„Kegelschnitte“ sind also Kegelschnitte, Zylinderschnitte oder Kugelschnitte.

Auch die Lösungen der linearen Gleichung mit zwei Unbekannten können wir auf ähnliche Art generieren: Schneiden sich die beiden Geraden unter einem 90° -Winkel, so entsteht bei der Rotation von h um g eine **Ebene**. Schneiden wir diese Fläche im Raum mit einer weiteren Ebene, so finden wir als Lösungsmenge eine Gerade, die leere Menge oder aber die ganze Ebene.

Die letzte Möglichkeit für zwei komplanare Geraden besteht darin, dass sie identisch sind. Die Rotations- „fläche“ bei der Rotation von h um g ist dann die **Gerade** g selber, und beim Schnitt mit einer Ebene entstehen ein Punkt, die leere Menge oder die Gerade selber.

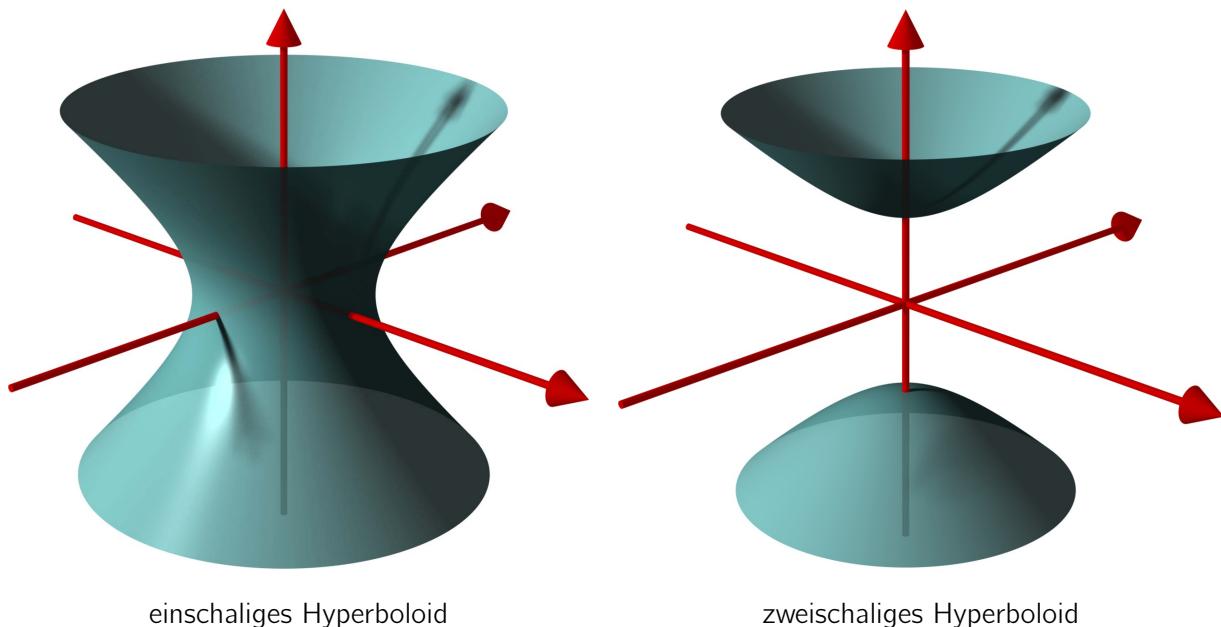
Wie sieht die Situation aus, wenn man von zwei *windschiefen* Geraden ausgeht? Stehen die beiden nicht gerade senkrecht zueinander so entsteht bei der Rotation von h um g ein **Hyperboloid**. Das Bild auf der folgenden Seite zeigt gut, dass dieser Körper aus der Rotation einer Geraden heraus verstanden werden kann. Wenn Sie dem Link [1] folgen, können Sie den Zwischenwinkel der Achsen verändern und das Getriebe laufen lassen.



Auch diese Hyperboloide können als quadratische Gleichung mit 3 Unbekannten geschrieben werden. Das einschalige Hyperboloid unten links ist die Fläche, welche zur Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

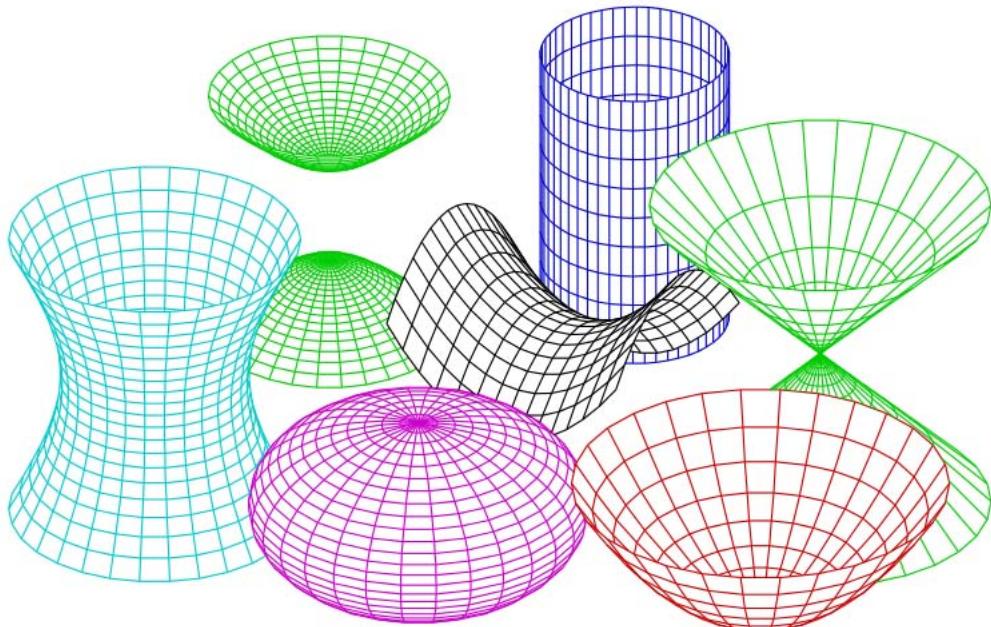
gehört. Der Schnitt mit einer Ebene kann (nach einer Rotation) immer als Schnitt mit der xy-Ebene aufgefasst werden und liefert damit eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten. Als Schnittfiguren entstehen hier Kreise, Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln und Paare von Geraden. Punkte, einzelne Geraden oder die leere Menge sind nicht möglich.



Der englische Wikipedia-Artikel zum Stichwort „hyperboloid“ zeigt sehr schön die dynamische Verwandlung eines Zylinders über ein Hyperboloid in einen Doppelkegel und wieder zurück.

Flächen im Raum, welche durch eine Gleichung zweiten Grades in drei Unbekannten beschrieben werden können, heissen **Quadriken**. Ganz allgemein ist der Schnitt einer solchen Quadrik mit einer Ebene ein „Kegelschnitt“. Die Ebenengleichung erlaubt es ja, eine Variable durch die beiden andern auszudrücken, und so entsteht eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten. Und von diesen zeigen wir in dieser Arbeit, dass ihre Lösungsmengen immer einem „Kegelschnitt“ entsprechen.

Mit „Kegelschnitt“ ist dabei eigentlich eine 2d-Quadrik gemeint. Wenn ein ebener Schnitt durch eine 3d-Quadrik gelegt wird, entsteht immer eine 2d-Quadrik. Eine ganze Ansammlung solcher Quadriken im dreidimensionalen euklidischen Raum zeigt das folgende Bild. Es ist wie die anderen Bilder in diesem Abschnitt der Internet-Enzyklopädie „wikipedia“ entnommen.



Alle Kegelschnitte sind ebene Quadriken, aber nicht alle ebenen Quadriken sind Kegelschnitte!

Literaturhinweise

- [1] <http://demonstrations.wolfram.com/ConnectingSkewAxlesWithHyperboloidalGears/>
- [2] Gubler Martin und Hepp Alfred, Skriptum „LinAlg_06.pdf“, Version 1.1 vom März 2015
Download von www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/LinAlg/LinAlg_06.pdf
- [3] Bronstein et al., „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Europa-Lehrmittel, 9.Auflage 2013
ISBN 978-3-8085-5671-9
- [4] Stöcker Horst, „Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren“,
Verlag Harry Deutsch, 3. Auflage 1995, ISBN 3-8171-1461-3

2 Die Definitionen

Wir untersuchen also Gleichungen vom Typ

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + 2 \cdot D \cdot x + 2 \cdot E \cdot y + F = 0 \quad (1)$$

wobei $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ gelten soll. Diese Gleichung lässt sich auch in Matrix-Form schreiben:

$$(x \ y \ 1) \cdot \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

Die Untermatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ enthält die Koeffizienten der quadratischen Terme. Sie ist symmetrisch und besitzt daher zwei Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit senkrecht zueinander stehenden Eigenvektoren (siehe [2]). Die Eigenvektoren liefern schon die Richtungen der Symmetriearchsen oder der Leitgeraden der zugehörigen Kegelschnitte.

Für die Formulierung von Ergebnissen, die für alle Kegelschnitte gelten, ist es wichtig, die Zuordnung von λ_1 und λ_2 sorgfältig vorzunehmen. Nur dann erhält man die beiden hübschen Resultate, die für alle „nicht-entarteten“ Kegelschnitte gelten und die ich in der Literatur bisher noch nicht gesehen habe:

$$\text{Exzentrizität} \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$\text{Quermass} \quad p = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}}$$

Wir verwenden die folgenden Definitionen:

- $\text{DET} := \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = A \cdot C \cdot F + 2 \cdot B \cdot D \cdot E - C \cdot D^2 - A \cdot E^2 - F \cdot B^2$
- $\det := \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2$
- $\text{spur} := A + C$
- $k := -\text{signum}(\text{DET})$
- $\lambda_1 := 0.5 \cdot (A + C + k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2})$
- $\lambda_2 := 0.5 \cdot (A + C - k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2})$
- $\text{diff} := k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2}$

Der Wert von k wird nicht benötigt im Falle von $\text{DET} = 0$.

Diese Größen werden oft „Invarianten“ der Gleichung (1) genannt, da Rotationen und Translationen des Koordinatensystems ihren Wert nicht ändern.

Für dieselbe Lösungskurve können aber die Werte dieser Größen stark variieren. Die Gleichung (1) kann ja mit einem beliebigen von Null verschiedenen Faktor multipliziert werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.

Es gelten offensichtlich die folgenden Zusammenhänge:

- $\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2$
- $\text{spur} = \lambda_1 + \lambda_2$
- $\text{diff} = \lambda_1 - \lambda_2$
- $\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur} + \text{diff})$
- $\lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot (\text{spur} - \text{diff})$

Die Eigenvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2 stehen senkrecht aufeinander. Sie lassen sich (siehe [2]) folgendermassen ausdrücken:

$$\vec{v}_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} A - \lambda_2 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot A - \text{spur} + \text{diff} \\ 2 \cdot B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - C + \text{diff} \\ 2 \cdot B \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} A - \lambda_1 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot A - \text{spur} - \text{diff} \\ 2 \cdot B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - C - \text{diff} \\ 2 \cdot B \end{pmatrix}$$

Wir möchten noch für zwei weitere häufig auftretende Terme eine Abkürzung einführen. Diese Terme entstehen, wenn wir die Determinante DET nach der letzten Spalte entwickeln:

$$\begin{aligned} \text{DET} &= \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = D \cdot \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix} - E \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} + F \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \\ &= D \cdot (B \cdot E - C \cdot D) - E \cdot (A \cdot E - B \cdot D) + F \cdot (A \cdot C - B^2) \\ &= D \cdot h_1 \quad + E \cdot h_2 \quad + F \cdot \det \end{aligned}$$

Diese beiden Terme $h_1 = B \cdot E - C \cdot D$ und $h_2 = B \cdot D - A \cdot E$ sind aber keine „Invarianten“ der Kurve, Rotationen des Koordinatensystems ändern ihren Wert.

Das Ziel dieser Untersuchung besteht nun darin, die Lösungsmenge von (1) in allen Fällen durch unsere „Invarianten“ zu beschreiben und alle gewünschten Angaben zur Lösungskurve zu machen. Insbesondere sollen sofort berechnet werden:

- Brennpunkte, Scheitelpunkte und „Leitpunkte“
- Hauptachsen, Nebenachsen, Leitgeraden und Asymptoten
- die lineare und die numerische Exzentrizität
- das Quermass p sowie die Halbachsen a und b

Dass die hergeleiteten Ergebnisse korrekt sind, lässt sich graphisch-interaktiv prüfen. Im Abschnitt 8 dieser Arbeit werden zwei GeoGebra-Dateien vorgestellt, welche erlauben, beliebige Parameterwerte für die Gleichung (1) einzustellen und den erzeugten Kegelschnitt und die dazu berechneten Scheitelpunkte usw. anzuschauen.

3 Die Resultate

Bei den Rechnungen zeigt es sich, dass man 15 Fälle unterscheiden kann. Diese 15 Fälle sind in den Tabellen 9.1 und 9.2 des Abschnittes 9 in der letzten Spalte numeriert.

In diesem Kapitel werden die detaillierten Ergebnisse für alle 15 Fälle dargestellt. Die Beweise dazu folgen in den nächsten Kapiteln. Wie schon in der Einleitung gesagt, entsprechen nicht alle 15 Fälle einem Kegelschnitt im Sinne der Geometrie. Zudem zeigt sich, dass gewisse Fälle gar nicht auftreten können, wenn die Koeffizienten A , B und C in (1) nicht alle null sind.

Fall 1: Ein Kreis

Die Kurve ist äquivalent zu $(x')^2 + (y')^2 = r^2$

Es gilt $A = C = \lambda_1 = \lambda_2$, $B = 0$, $\text{diff} = 0$, $\text{spur} = 2 \cdot A = 2 \cdot C$

$$\text{Es ist } r^2 = p^2 = \frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3} = \frac{-\text{DET}}{A^3}$$

Für den Mittelpunkt $M = (u/v)$ des Kreises gilt

$$M = (u/v) = \left(\frac{h_1}{\det} / \frac{h_2}{\det} \right) = \left(\frac{-D}{A} / \frac{-E}{A} \right)$$

Symmetriearchsen gibt es viele, Scheitelpunkte und Brennpunkte entfallen.

$$\text{Es ist } \epsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{1 - \frac{A}{A}} = \sqrt{1 - 1} = 0$$

Die Rücktransformation erfolgt durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + u \\ y' + v \end{pmatrix}$. Es könnte zuerst noch eine beliebige Rotation um M appliziert werden.

Der Kreis lässt sich als Kegelschnitt, als Zylinderschnitt und als Kugelschnitt realisieren.

Fall 2: Eine Ellipse

Die Kurve ist kongruent zu $\left(\frac{x'}{a} \right)^2 + \left(\frac{y'}{b} \right)^2 = 1$ mit $a^2 > b^2$.

Symmetriezentrum der Ellipse ist

$$M = (u/v) = \left(\frac{h_1}{\det} / \frac{h_2}{\det} \right) = \left(\frac{B \cdot E - C \cdot D}{A \cdot C - B^2} / \frac{B \cdot D - A \cdot E}{A \cdot C - B^2} \right)$$

$$\text{Es ist } a^2 = \frac{-\text{DET}}{\lambda_2 \cdot \det} > b^2 = \frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot \det} > 0, \quad c^2 = a^2 - b^2 = \frac{-\text{DET} \cdot \text{diff}}{\det^2}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}; \quad p = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}}$$

Für die Rücktransformation gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

wobei für

- $B \neq 0$ $d = \frac{B}{\sqrt{(A - \lambda_2)^2 + B^2}}$ $e = \frac{\lambda_2 - A}{\sqrt{(A - \lambda_2)^2 + B^2}}$
- $B = 0$ $d = \begin{cases} 0 & \text{falls } \text{DET} \cdot (A - C) > 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ $e = 1 - d$

Die Brennpunkte der Ellipse sind

$$(u + d \cdot c / v - e \cdot c) \quad \text{sowie} \quad (u - d \cdot c / v + e \cdot c)$$

Die Hauptsymmetriechse läuft durch M und die beiden Brennpunkte, ein Richtungsvektor ist $\begin{pmatrix} d \\ -e \end{pmatrix}$. Die Nebensymmetriechse hat demnach den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix}$.

Die Leitgeraden sind parallel zur Nebensymmetriechse und sie laufen durch die Leitpunkte, welche mit obiger Rücktransformation aus $L' = \left(\pm \frac{a}{\epsilon} / 0 \right)$ erhalten werden.

Die Ellipse lässt sich als Kegelschnitt und als Zylinderschnitt realisieren.

Fall 3: Dieser Fall kann nicht auftreten.

Fall 4: Die Lösungsmenge ist leer

Die Gleichung (1) ist äquivalent zu $\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = -1$.

Die Lösungsmenge ist offensichtlich leer. Ein einfaches Beispiel dazu haben wir mit

$$x^2 + 2 \cdot y^2 + 1 = 0$$

Es ist $\text{DET} = 2$, $\det = 2$, $\text{spur} = 3$ und somit $\text{DET} \cdot \text{spur} > 0$.

Dieser Fall lässt sich weder als Kegelschnitt noch als Zylinderschnitt realisieren. Er tritt zum Beispiel auf beim Schnitt einer Ebene mit einer Kugel oder einem Ellipsoid.

Fall 5: Eine Parabel

Die Kurve (1) ist kongruent zu $y' = a \cdot (x')^2$ mit $a > 0$.

Es gilt $\lambda_1 = A + C$ und $\lambda_2 = 0$, und somit haben wir auch in diesem Fall

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{1 - \frac{0}{\lambda_1}} = 1$$

Das Quermass der Parabel ist gegeben durch

$$p = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{\text{spur}^3}} = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}} = \frac{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}{(A+C)^2}$$

Für a ergibt sich daraus wegen $p = \frac{1}{2 \cdot a}$

$$a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\text{spur}^3}{-\text{DET}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(\lambda_1)^3}{-\text{DET}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(A+C)^2}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}$$

Für die Rücktransformation der Parabel $y' = a \cdot (x')^2$ gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

wo $S = (u/v)$ der Scheitelpunkt der Parabel ist und die Werte von d und e folgendermassen gegeben sind:

$$d = \frac{h_2}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}, \quad e = \frac{h_1}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}$$

Die Werte von u und v erhalten wir über D' und E' wie folgt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } u' = \frac{-D'}{\lambda_1} \text{ und } v' = \frac{D'^2}{2 \cdot E' \cdot \lambda_1} - \frac{F}{2 \cdot E'} \text{ und } D' = d \cdot D - e \cdot E, \quad E' = e \cdot D + d \cdot E$$

Die resultierenden Terme für u und v , ausgedrückt allein durch die Parameter A, B, C, D, E, F sind ziemlich umfangreich ...

Der Vektor \overrightarrow{SF} vom Scheitelpunkt S zum Brennpunkt F ist gegeben durch

$$\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot (A+C)^2} \cdot \begin{pmatrix} B \cdot E - C \cdot D \\ B \cdot D - A \cdot E \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \text{spur}^2} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Somit gilt für den Brennpunkt F

$$F = (u + r / v + s)$$

und entsprechend für den Leitpunkt L

$$L = (u - r / v - s)$$

Die Hauptsymmetriearchse hat die Gleichung

$$h_1 \cdot (y - v) = h_2 \cdot (x - u)$$

Für die Leitgerade gilt

$$h_2 \cdot (y - v + s) = -h_1 \cdot (x - u + r)$$

Die Parabel lässt sich als Kegelschnitt realisieren.

Die Fälle 6 und 7 können nicht auftreten.

Fälle 8, 9 und 10: Eine Hyperbel

Die Kurve (1) ist deckungsgleich mit $\left(\frac{x'}{a}\right)^2 - \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$

$$\text{mit } a^2 = \frac{-\text{DET}}{\lambda_2 \cdot \det} = \frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot (\lambda_2)^2} > 0, \quad b^2 = \frac{\text{DET}}{\lambda_1 \cdot \det} = \frac{\text{DET}}{(\lambda_1)^2 \cdot \lambda_2} > 0$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{-\text{DET} \cdot \text{diff}}{\det^2} \quad (\text{wie bei der Ellipse!})$$

$$\text{Es ist } \epsilon = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (\text{wie bei der Ellipse})$$

Der Mittelpunkt M der Hyperbel, also der Schnittpunkt der Asymptoten und der Symmetriearchsen, bestimmt sich ebenfalls wie bei der Ellipse:

$$M = (u/v) = \left(\frac{h_1}{\det} / \frac{h_2}{\det} \right) = \left(\frac{B \cdot E - C \cdot D}{A \cdot C - B^2} / \frac{B \cdot D - A \cdot E}{A \cdot C - B^2} \right)$$

Das Quermass p wird ebenfalls wie bei der Ellipse berechnet:

$$p = \frac{b^2}{a} = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}}$$

Für die Rücktransformation gelten ebenfalls dieselben Formeln wie bei der Ellipse.

Die Hauptsymmetriearchse durch die beiden Brennpunkte und M hat die Gleichung

$$d \cdot (y - v) = -e \cdot (x - u)$$

Die Nebensymmetriearchse, welche die beiden Hyperbeläste aufeinander abbildet, hat die Gleichung

$$e \cdot (y - v) = d \cdot (x - u)$$

Auch die Leitpunkte und die Leitgeraden werden genau wie bei den Ellipsen berechnet.

Hyperbeln entstehen als Kegelschnitte oder zum Beispiel als Schnitte von Hyperboloiden.

Spezialfall 9: Eine rechtwinklige Hyperbel

Wenn gilt $\text{spur} = A + C = 0$ dann ist $A = -C$ und $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Die Kurve ist deckungsgleich mit $(x')^2 - (y')^2 = a^2$

$$\text{mit } a^2 = \frac{-\text{DET}}{\lambda_2 \cdot \det} = \frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot (\lambda_2)^2} = \frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}$$

$$\text{Es gilt } c^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2, \quad \epsilon = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot a^2}{a^2}} = \sqrt{2}$$

Die beiden Asymptoten stehen senkrecht aufeinander. Für den Mittelpunkt, die Symmetrieachsen usw. entnehme man die Terme aus dem allgemeinen Fall 8 bis 10.

Die obige Gleichung für x' und y' kann durch eine zusätzliche Drehung um 45° umgeformt werden in

$$x'' \cdot y'' = \frac{1}{2} \cdot a^2$$

Asymptoten sind dann die beiden Koordinatenachsen.

Fall 11: Die Lösungsmenge enthält nur einen Punkt

Die Untersuchungen führen hier auf die zu (1) äquivalente Gleichung

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 = 0$$

Wegen $\det > 0$ haben beide Eigenwerte dasselbe Vorzeichen, die einzige Lösung von (1) ist dann

$$M = (u/v) = \left(\frac{h_1}{\det} / \frac{h_2}{\det} \right)$$

Dieser Fall kann als Kegelschnitt oder als Kugelschnitt realisiert werden.

Fall 12: Ein Paar paralleler Geraden

In den Fällen 12, 13 und 14 ist die Kurve (1) kongruent zu

$$(x')^2 + 2 \cdot D \cdot (x') + A \cdot F = 0 \quad \text{falls } A \neq 0$$

$$(x')^2 + 2 \cdot E \cdot (x') + C \cdot F = 0 \quad \text{falls } C \neq 0$$

Diese quadratischen Gleichungen haben zwei, eine oder keine Lösung für x' , je nach dem Vorzeichen der Diskriminanten

$$4 \cdot (D^2 - A \cdot F) \quad \text{falls } A \neq 0$$

$$4 \cdot (E^2 - C \cdot F) \quad \text{falls } C \neq 0$$

Ist die Diskriminante positiv (Fall 12), so gibt es die folgenden beiden Lösungen für x' :

$$\begin{aligned} x' &= -D \pm \sqrt{D^2 - A \cdot F} && \text{falls } A \neq 0 \\ x' &= -E \pm \sqrt{E^2 - C \cdot F} && \text{falls } C \neq 0 \end{aligned}$$

Da die Werte von y' beliebig sind, entsprechen diese beiden Lösungen für x' einem Paar von Geraden, die parallel sind zur y' -Achse.

Für die Lösungen von (1) müssen diese beiden Geraden noch mit der folgenden Rücktransformation an den richtigen Platz geschickt werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{A^2 + B^2} \cdot \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} && \text{falls } A \neq 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{C^2 + B^2} \cdot \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} && \text{falls } C \neq 0 \end{aligned}$$

Die Fälle 12, 13 und 14 können als Schnitt einer Ebene und eines Zylinders realisiert werden.

Fall 13: Eine Gerade

Die Situation ist dieselbe wie im Fall 12, nur ist jetzt der Wert der Diskriminanten null. Es gibt nur eine Lösung für x' , nämlich

$$\begin{aligned} x' &= -D && \text{falls } A \neq 0 \\ x' &= -E && \text{falls } C \neq 0 \end{aligned}$$

Die entsprechende Gerade für (x'/y') muss noch mit der passenden Rücktransformation von Fall 12 behandelt werden.

Fall 14: Die leere Menge

Wir sind immer noch in der Situation von Fall 12, nur ist jetzt die Diskriminante negativ. Es gibt keine Lösung (x'/y') , und entsprechend hat auch (1) keine Lösungen.

Fall 15: Zwei einander schneidende Geraden

Hier haben wir nochmals einen echten Kegelschnitt: Statt der beiden Hyperbeläste schneidet die Ebene zwei Mantellinien aus dem Doppelkegel, weil sie durch dessen Spitze verläuft.

Die Hyperbelgleichung reduziert sich zu

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0 \iff y' = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} \cdot x' = \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot x'$$

Dieses Geradenpaar mit Schnittpunkt $(0/0)$ muss noch mit der Rücktransformation der Ellipse (siehe Fall 2) auf die Lösung von (1) abgebildet werden. Wir erhalten dann ein Geradenpaar mit dem Schnittpunkt $M = (u/v)$.

4 Zur Korrektheit der Fallunterscheidungen

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass die Fallunterscheidungen, wie sie in den Tabellen 9.1 und 9.2 auftreten, korrekt und vollständig sind. Wir gehen dazu von der Gleichung (2) aus:

$$(x \ y \ 1) \cdot \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

oder, mit den entsprechenden Abkürzungen,

$$X^T \cdot M \cdot X = 0 \quad (3)$$

Die symmetrische Untermatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ besitzt zwei senkrechte Eigenvektoren mit den zugehörigen Eigenwerten λ_1 und λ_2 . Die Untermatrix ist daher ähnlich zur Diagonalmatrix mit diesen beiden Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen.

Es gibt sogar eine **Rotation** mit

$$\begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Setzen wir

$$Q = \begin{pmatrix} d & -e & 0 \\ e & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

so folgt aus (3)

$$X^T \cdot Q^{-1} \cdot Q \cdot M \cdot Q^{-1} \cdot Q \cdot X = 0$$

und daraus wegen $Q^{-1} = Q^T$

$$(Q \cdot X)^T \cdot (Q \cdot M \cdot Q^{-1}) \cdot (Q \cdot X) = 0 \quad (5)$$

Mit

$$X' = Q \cdot X = \begin{pmatrix} d \cdot x - e \cdot y \\ e \cdot x + d \cdot y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$M' = Q \cdot M \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & D' \\ 0 & \lambda_2 & E' \\ D' & E' & F \end{pmatrix}$$

wird (5) zu

$$X'^T \cdot M' \cdot X' = 0$$

oder

$$(x' \ y' \ 1) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & D' \\ 0 & \lambda_2 & E' \\ D' & E' & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

Ausmultipliziert liefert das

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + 2 \cdot D' \cdot x' + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot E' \cdot y' + F = 0 \quad (7)$$

Die Rotation hat das gemischte Glied $2 \cdot B \cdot x \cdot y$ eliminiert.

Dabei gilt $\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = A \cdot C - B^2$

$$\text{spur} = \lambda_1 + \lambda_2 = A + C$$

$$\text{DET} = A \cdot C \cdot F + 2 \cdot B \cdot D \cdot E - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2$$

aber auch $\text{DET} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot F - \lambda_2 \cdot (D')^2 - \lambda_1 \cdot (E')^2$

und $\text{DET} = D \cdot h_1 + E \cdot h_2 + F \cdot \det$

Die Matrizen M und $M' = Q \cdot M \cdot Q^{-1}$ haben ja dieselbe Determinante. Die weiteren Darstellungen von DET werden noch von grossem Nutzen sein.

Wir betrachten zuerst den **parabolischen Fall** mit $\det = 0$.

Wegen $\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ muss einer der Eigenwerte null sein. Beide können nicht null sein, da wir $A = B = C = 0$ ausgeschlossen haben.

a) Es sei zuerst zusätzlich $\text{DET} \neq 0$. Wegen

$$\text{DET} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot F - \lambda_2 \cdot (D')^2 - \lambda_1 \cdot (E')^2 = -\lambda_2 \cdot (D')^2 - \lambda_1 \cdot (E')^2$$

gilt dann

$$\text{spur} = \lambda_1 \text{ und } E' \neq 0 \quad \text{falls } \lambda_2 = 0$$

$$\text{spur} = \lambda_2 \text{ und } D' \neq 0 \quad \text{falls } \lambda_1 = 0$$

In beiden Fällen hat die spur das entgegengesetzte Vorzeichen von DET. Es kann somit nur der Fall 5 auftreten, die Fälle 6 und 7 sind nicht möglich.

Die spur hat somit auch dasselbe Vorzeichen wie k nach unseren Definitionen auf der Seite 4. Daraus ergibt sich, dass im Fall $\det = 0$ und $\text{DET} \neq 0$ immer gilt

$$\text{spur} = \lambda_1 = A + C \neq 0 \text{ und } \lambda_2 = 0$$

Es ist also in diesem Fall

$$\text{DET} = -\lambda_1 \cdot (E')^2$$

b) Nun sei neben $\det = 0$ auch noch $\text{DET} = 0$. Im Abschnitt 5 zeigen wir, dass in diesem Fall (1) äquivalent ist zu

$$(x')^2 + 2 \cdot D \cdot x' + A \cdot F = 0 \quad \text{falls } A \neq 0$$

$$(x')^2 + 2 \cdot E \cdot x' + C \cdot F = 0 \quad \text{falls } C \neq 0$$

Diese quadratischen Gleichungen für x' haben je nach dem Wert der Diskriminanten zwei, eine oder keine Lösung. So entstehen die Fälle 12, 13 und 14.

Alle Details im parabolischen Fall werden im Abschnitt 5 ausgearbeitet.

In der **elliptischen** und der **hyperbolischen** Situation können wir die Gleichung (7) weiter vereinfachen. Wegen $\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ folgt $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$. Die folgende Umformung ist daher gestattet:

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{D'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{E'}{\lambda_2} \right)^2 = -F + \frac{(D')^2}{\lambda_1} + \frac{(E')^2}{\lambda_2}$$

Wir setzen

$$x'' = x' + \frac{D'}{\lambda_1} \quad \text{und} \quad y'' = y' + \frac{E'}{\lambda_2}$$

und erhalten

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 = \frac{-F \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 + (D')^2 \cdot \lambda_2 + (E')^2 \cdot \lambda_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$$

also

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 = \frac{-\text{DET}}{\det} \quad (8)$$

Die Lösungen von (8) gehen durch eine Rotation und eine Translation aus den Lösungen von (1) hervor, die Lösungskurven sind also kongruent.

Der **elliptische** Fall liegt vor, wenn λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen haben, also wenn gilt $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det > 0$.

- c) Hat $-\text{DET}$ dasselbe Vorzeichen wie λ_1 oder λ_2 oder die spur, so stellt (8) die Gleichung einer Ellipse in Hauptachsenlage dar, wir haben den Fall 1 oder 2.
Der Fall 3 kann nicht auftreten, da die spur nicht null sein kann, wenn λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen haben!
- d) Hat DET das „falsche“ Vorzeichen, also dasselbe wie λ_1 oder λ_2 , dann hat die Gleichung (8) keine Lösungen und wir sind im Fall 4.
- e) Ist DET aber null, so ist die einzige Lösung von (8) der Punkt $(x''/y'') = (0/0)$ und wir sind im Fall 11.

Im **hyperbolischen** Fall haben λ_1 und λ_2 unterschiedliche Vorzeichen. Dann ist $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det < 0$. Die Gleichung (8) hat dann immer Lösungen.

- f) Ist $\text{DET} \neq 0$, so besteht die Lösungsmenge aus einem Paar von Hyperbelästen, wir haben die Fälle 8, 9 und 10.
- g) Ist $\text{DET} = 0$, so reduziert sich (8) auf

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 = -\lambda_2 \cdot (y'')^2 \quad (9)$$

wobei ja λ_1 und λ_2 unterschiedliche Vorzeichen haben. Lösungsmenge von (9) ist das Paar von Geraden

$$y'' = \pm \sqrt{\frac{\lambda_1}{-\lambda_2}} \cdot x''$$

die sich im Nullpunkt schneiden. Das ist der Fall 15.

5 Die Details im parabolischen Fall

Wir sind also im Fall von $\det = 0$. Wir studieren zuerst den „nichtentarteten“ Fall mit $\text{DET} \neq 0$. Dann gilt

$$\lambda_1 = A + C = \text{spur} \neq 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 0$$

Die Gleichung (7) reduziert sich zu

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + 2 \cdot D' \cdot x' + 2 \cdot E' \cdot y' + F = 0 \quad (10)$$

Wegen $\text{DET} = -\lambda_1 \cdot (E')^2 \neq 0$ gilt auch $E' \neq 0$ und wir können (10) umformen zu

$$\lambda_1 \cdot \left(x' + \frac{D'}{\lambda_1} \right)^2 = -2 \cdot E' \cdot \left(y' - \frac{(D')^2}{2 \cdot E' \cdot \lambda_1} + \frac{F}{2 \cdot E'} \right)$$

oder

$$a \cdot (x' - u')^2 = (y' - v') \quad (11)$$

oder

$$a \cdot (x'')^2 = y'' \quad (12)$$

mit den folgenden Variablendefinitionen:

$$a = \frac{\lambda_1}{-2 \cdot E'} = \frac{A + C}{-2 \cdot E'} \quad (13.1)$$

$$u' = \frac{-D'}{\lambda_1} = \frac{-D'}{A + C} \quad (13.2)$$

$$v' = \frac{(D')^2}{2 \cdot E' \cdot \lambda_1} - \frac{F}{2 \cdot E'} = \left(\frac{(D')^2}{A + C} - F \right) / (2 \cdot E') \quad (13.3)$$

Wir müssen also D' und E' berechnen, wozu wir die Parameter d und e der Rotation benötigen. Diese werden leider durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} \quad (14)$$

nicht eindeutig bestimmt.

Immerhin liefert (14) die Resultate

$$d^2 = \frac{A}{A + C}, \quad e^2 = \frac{C}{A + C} \quad \text{und} \quad e \cdot d = \frac{-B}{A + C} \quad (15)$$

Die Berechnung von

$$M' = Q \cdot M \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & D' \\ 0 & \lambda_2 & E' \\ D' & E' & F \end{pmatrix}$$

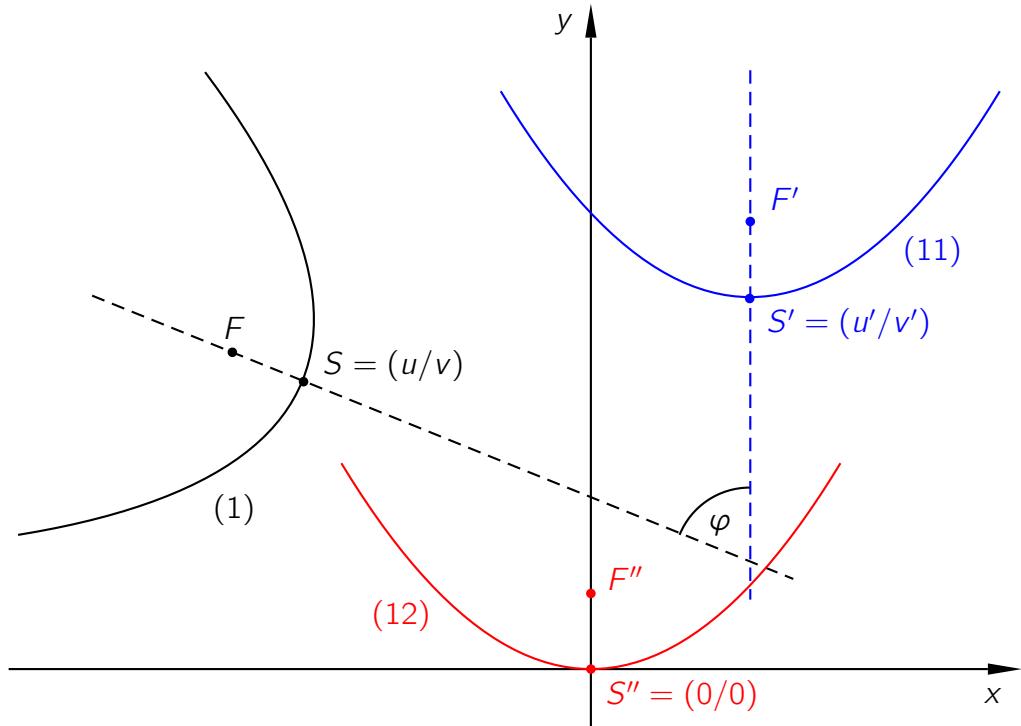
liefert weiter

$$D' = d \cdot D - e \cdot E \quad (16.1)$$

$$E' = e \cdot D + d \cdot E \quad (16.2)$$

Damit berechnen wir im folgenden den Vektor \overrightarrow{SF} , der vom Scheitelpunkt der Parabel zum Brennpunkt führt. Aus diesem Vektor ergeben sich dann die Werte für d und e .

(1) wird durch eine Drehung um den Nullpunkt in (11) übergeführt, eine Translation liefert anschliessend die rote Kurve (12):



Die Rücktransformation, welche die rote Parabel für (x''/y'') wieder auf die Lösung von (1) in (x/y) abbildet, können wir schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (17)$$

wo $S = (u/v)$ der noch zu bestimmende Scheitelpunkt der Parabel (1) ist.

$$\text{Nun gilt allgemein } \overrightarrow{S''F''} = \overrightarrow{S'F'} = \left(0 / \frac{1}{4 \cdot a} \right)$$

Dieser Vektor wird von der Rotation in (17) auf den Vektor \overrightarrow{SF} abgebildet. Mithilfe von (13.1), (15) und (16.2) lässt sich erstaunlicherweise der Vektor \overrightarrow{SF} berechnen, obwohl wir die Werte von a , d und e noch nicht kennen:

$$\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4 \cdot a} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2 \cdot (A+C)^2} \cdot \begin{pmatrix} B \cdot E - C \cdot D \\ B \cdot D - A \cdot E \end{pmatrix}$$

also

$$\overrightarrow{SF} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \text{spur}^2} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Gilt $\text{DET} \neq 0$, so kann dieser Vektor nicht null sein wegen

$$\text{DET} = D \cdot h_1 + E \cdot h_2 + F \cdot \det = D \cdot h_1 + E \cdot h_2$$

Aus diesem Vektor \overrightarrow{SF} erhalten wir jetzt die Werte für d und e :

$$d = \cos(\varphi) = \frac{h_2}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}} \quad (19.1)$$

$$e = \sin(\varphi) = \frac{h_1}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}} \quad (19.2)$$

d und e werden so definiert, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf einen Vektor der Richtung \overrightarrow{SF} abgebildet wird. Die Kurven (11) und (12) sind also immer nach oben geöffnet, das Vorzeichen von a in (13.1) ist immer positiv. e und d sorgen in (16.2) dafür, dass E' das passende Vorzeichen hat.

Damit sind mit (16) auch E' und D' bekannt, woraus wir wiederum mit (13) die Werte von a , u' und v' erhalten. Aus u' und v' erhalten wir schliesslich die Koordinaten u und v des Scheitelpunktes S der Parabel.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \quad (20)$$

Mit (18) erhalten wir daraus die Koordinaten des Brennpunktes F und des „Leitpunktes“ L :

$$F = (u + r/v + r) \quad (21.1)$$

$$L = (u - r/v - r) \quad (21.2)$$

Die Symmetriearchse der Parabel wird durch die Gleichungen

$$e \cdot (y - v) = d \cdot (x - u) \quad (22.1)$$

oder

$$h_1 \cdot (y - v) = h_2 \cdot (x - u) \quad (22.2)$$

beschrieben, da ja \overrightarrow{SF} ein Richtungsvektor dieser Symmetriearchse ist. Die Leitgerade steht darauf senkrecht und geht durch den Punkt L :

$$e \cdot (x - (u - r)) = -d \cdot (y - (v - s)) \quad (23.1)$$

oder

$$-h_1 \cdot (x - u + r) = h_2 \cdot (y - v + s) \quad (23.2)$$

Damit sind alle geometrischen Bestimmungsstücke der Parabel bekannt und können vom GeoGebra-Programm „parabol.ggb“ berechnet und gezeichnet werden.

Nun wollen wir noch schöne Formeln für die algebraischen Kennzahlen a und p der Parabel herleiten. Aus (13.1) und (16.2) erhalten wir

$$a = \frac{\lambda_1}{-2 \cdot E'} = \frac{(A+C) \cdot \sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}{-2 \cdot (h_1 \cdot D + h_2 \cdot E)} \quad (24.1)$$

und daraus

$$p = \frac{1}{2 \cdot a} = \left| \frac{E'}{\lambda_1} \right| = \sqrt{\frac{(E')^2}{(\lambda_1)^2}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 \cdot (E')^2}{(\lambda_1)^3}} = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}} \quad (25.1)$$

Diese Formel hat den Vorteil, dass sie für alle nichtentarteten Kegelschnitte gilt.

Andere schöne Darstellungen erhalten wir, wenn wir die folgende Identität ausnützen:

$$-\text{DET} \cdot (A+C) = (h_1)^2 + (h_2)^2 \quad (26)$$

Diese Gleichung gilt nur im parabolischen Fall, also wenn $\det = 0$ gilt. Die Korrektheit von (26) ergibt sich durch einfaches Nachrechnen aus der Darstellung von DET gemäss Seite 5:

$$\text{DET} = D \cdot h_1 + E \cdot h_2 + F \cdot \det \stackrel{!}{=} D \cdot h_1 + E \cdot h_2$$

Aus (25.1) erhalten wir mit (26) den Ausdruck

$$p = \sqrt{\frac{-\text{DET} \cdot (A+C)}{(\lambda_1)^3 \cdot (A+C)}} = \sqrt{\frac{(h_1)^2 + (h_2)^2}{(A+C)^4}} = \frac{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}{(A+C)^2} \quad (25.2)$$

Für a erhalten wir daraus

$$a = \frac{1}{2 \cdot p} = \frac{(A+C)^2}{2 \cdot \sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}} \quad (24.2)$$

Unsere Formeln für p und a sind denjenigen in [3] und [4] überlegen, weil sie die Voraussetzung $A \neq 0$ nicht nötig haben. Sie gelten in allen Fällen.

Die letzten beiden Formeln hätten wir auch direkt aus (18) ableiten können. Der Betrag des Vektors \vec{SF} ist ja bei allen Parabeln gleich $\frac{1}{2} \cdot p$ oder $\frac{1}{4} \cdot a$.

Nun gilt es noch den „entarteten“ Fall mit $\text{DET} = 0$ zu studieren.

Es sei also $\text{DET} = 0$ und $\det = 0$.

(26) zeigt, dass gilt

$$\text{DET} = 0 \iff (h_1 = 0 \text{ und } h_2 = 0) \iff (BE = CD \text{ und } BD = AE)$$

Leider muss man hier zwei Fälle unterscheiden, die sich aber komplett analog behandeln lassen.

a) Es sei $A \neq 0$ (es ist ja mindestens eine der Zahlen A und C von null verschieden).

Wir multiplizieren (1) mit A und erhalten

$$A^2 \cdot x^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot y + A \cdot C \cdot y^2 + 2 \cdot A \cdot D \cdot x + 2 \cdot A \cdot E \cdot y + A \cdot F = 0$$

Mit $A \cdot C = B^2$ und $A \cdot E = B \cdot D$ ist das äquivalent zu

$$(A \cdot x + B \cdot y)^2 + 2 \cdot D \cdot (A \cdot x + B \cdot y) + A \cdot F = 0$$

oder

$$(x')^2 + 2 \cdot D \cdot x' + A \cdot F = 0 \quad (27.1)$$

Die Koordinatentransformation ist eine Drehstreckung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die inverse Abbildung existiert, sie lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2 + B^2} \cdot \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (28.1)$$

Die Lösungen von (27.1) hängen von der Diskriminanten ab:

$$4 \cdot D^2 - 4 \cdot A \cdot F = 4 \cdot (D^2 - A \cdot F)$$

Damit ist für den Fall $A \neq 0$ das Unterscheidungskriterium der Fälle 12, 13 und 14 bewiesen.

Jede Lösung von (27.1) für x' liefert als Lösungsmenge für (x'/y') eine Gerade mit festem x' -Wert, welche parallel liegt zur y' -Achse. Diese Geraden sind dann für die Lösung von (1) noch mit der Abbildung (28.1) an den richtigen Ort zu rücken.

Der Fall 14 liegt vor, wenn gilt $D^2 - A \cdot F < 0$. (27.1) hat dann keine Lösungen, und die Lösungsmenge von (1) ist somit auch leer.

Im Fall 13 gilt $D^2 - A \cdot F = 0$. Einzige Lösung von (27.1) ist dann $x' = -D$. Bildet man die beiden Punkte $(-D/0)$ und $(-D/1)$ mit (28.1) ab, so hat man zwei Punkte der Geraden, welche die Lösungsmenge von (1) bildet.

Im Fall 12 mit $D^2 - A \cdot F > 0$ hat die Gleichung (27.1) zwei Lösungen, nämlich

$$x' = -D \pm \sqrt{D^2 - A \cdot F}$$

Die beiden Geraden zu diesen x' -Werten mit beliebigen Werten von y' müssen wieder mit (28.1) auf die beiden parallelen Geraden abgebildet werden, welche die Lösungsmenge von (1) darstellen.

- b) Es sei $C \neq 0$ (wenn $A = 0$ gilt, ist sicher $C \neq 0$). Dann multiplizieren wir (1) mit C und erhalten ganz analog

$$(x')^2 + 2 \cdot E \cdot x' + C \cdot F = 0 \quad (27.2)$$

Die entscheidende Diskriminante ist jetzt

$$4 \cdot E^2 - 4 \cdot C \cdot F = 4 \cdot (E^2 - C \cdot F)$$

und die Rücktransformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{B^2 + C^2} \cdot \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (28.2)$$

Damit sind die Fälle 5, 6, 7 sowie 12, 13 und 14 vollständig abgehandelt.

6 Die Details im elliptischen Fall

Es sei also $\det > 0$. Dann haben λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen, und beide Eigenwerte sind verschieden von null.

Wir studieren zuerst den „nicht-entarteten“ Fall mit $\text{DET} \neq 0$.

Wir starten bei der Gleichung

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + \lambda_2 \cdot (y'')^2 = \frac{-\text{DET}}{\det} \quad (8)$$

Nach unseren Definitionen gilt $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$, da k in diesem Fall dasselbe Vorzeichen hat wie λ_1, λ_2 und die spur. Deshalb hat die Ellipse (8) ihre Brennpunkte auf der y -Achse. Dies wollen wir mit einer zusätzlichen Drehung um 90° ändern. Statt (8) haben wir dann

$$\lambda_2 \cdot (\hat{x})^2 + \lambda_1 \cdot (\hat{y})^2 = \frac{-\text{DET}}{\det} \quad (30)$$

Vergleichen wir mit der Ellipsengleichung in Mittelpunktslage

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

so erhalten wir

$$a^2 = \frac{-\text{DET}}{\lambda_2 \cdot \det} = \frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot (\lambda_2)^2} \quad (31.1)$$

$$b^2 = \frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot \det} = \frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^2 \cdot \lambda_2} \quad (31.2)$$

mit $a^2 > b^2$. Mittelpunkt der Ellipse (30) ist $M' = (0/0)$, Scheitelpunkte, Symmetriechsen, Brennpunkte und Leitgeraden sind bekannt. Diese Bestimmungsstücke werden von der Rücktransformation

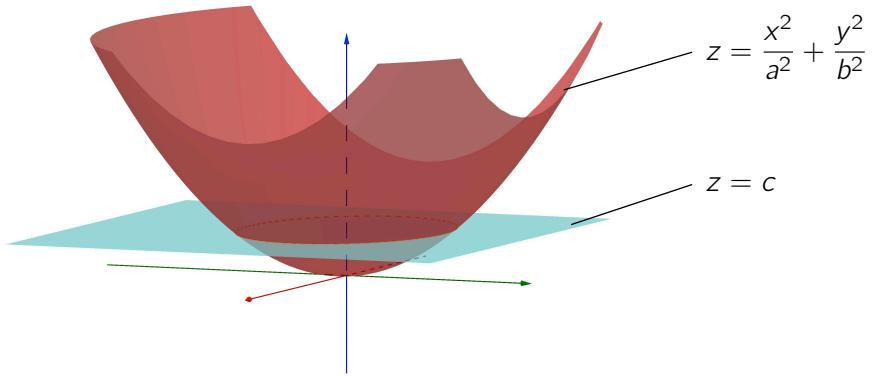
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (32)$$

auf die Lösung von (1) übertragen. Wir bestimmen zuerst den Mittelpunkt $M = (u/v)$ der Lösung von (1), also den translativen Anteil von (32).

Wir betrachten dazu die Gleichung

$$z = \frac{(\hat{x})^2}{a^2} + \frac{(\hat{y})^2}{b^2} \quad (33)$$

(33) definiert ein elliptisches Paraboloid als Fläche im Raum. Diese Quadrik hat ihr absolutes Minimum in z -Richtung bei $\hat{x} = 0$ und $\hat{y} = 0$. Dort sind die beiden partiellen Ableitungen von (33) null:



Dasselbe gilt auch bei der Original-Ellipse (1)! Wir setzen also die beiden partiellen Ableitungen von (1) gleich null:

$$\begin{aligned} 2 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B \cdot y + 2 \cdot D &= 0 \\ 2 \cdot B \cdot x + 2 \cdot C \cdot y + 2 \cdot E &= 0 \end{aligned}$$

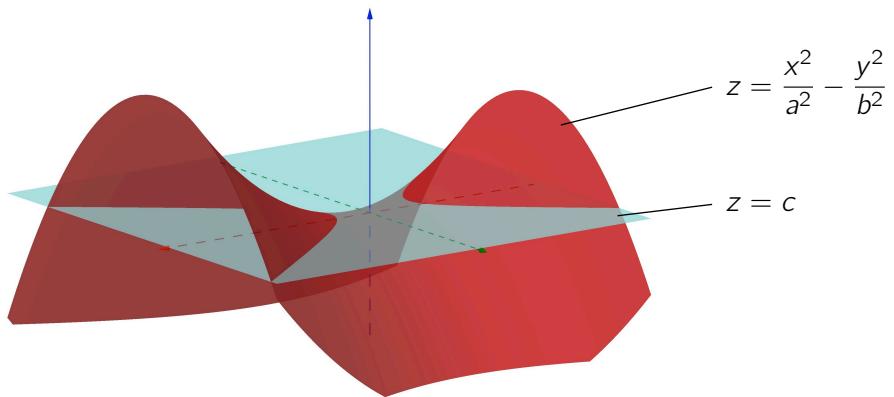
Für den Mittelpunkt $M = (u/v)$ muss also gelten

$$\underbrace{\begin{aligned} A \cdot u + B \cdot v &= -D \\ B \cdot u + C \cdot v &= -E \end{aligned}}_{\text{Multiplikation von links mit der inversen Matrix liefert die Werte von } u \text{ und } v:} \iff \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix}$$

Multiplikation von links mit der inversen Matrix liefert die Werte von u und v :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{A \cdot C - B^2} \cdot \begin{pmatrix} B \cdot E - C \cdot D \\ B \cdot D - A \cdot E \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad (34.1)$$

Die gleichen Überlegungen mit demselben Resultat gelten auch im hyperbolischen Fall. Anstelle des Minimums der Quadrik wird dort die Lage eines Sattelpunktes bestimmt:

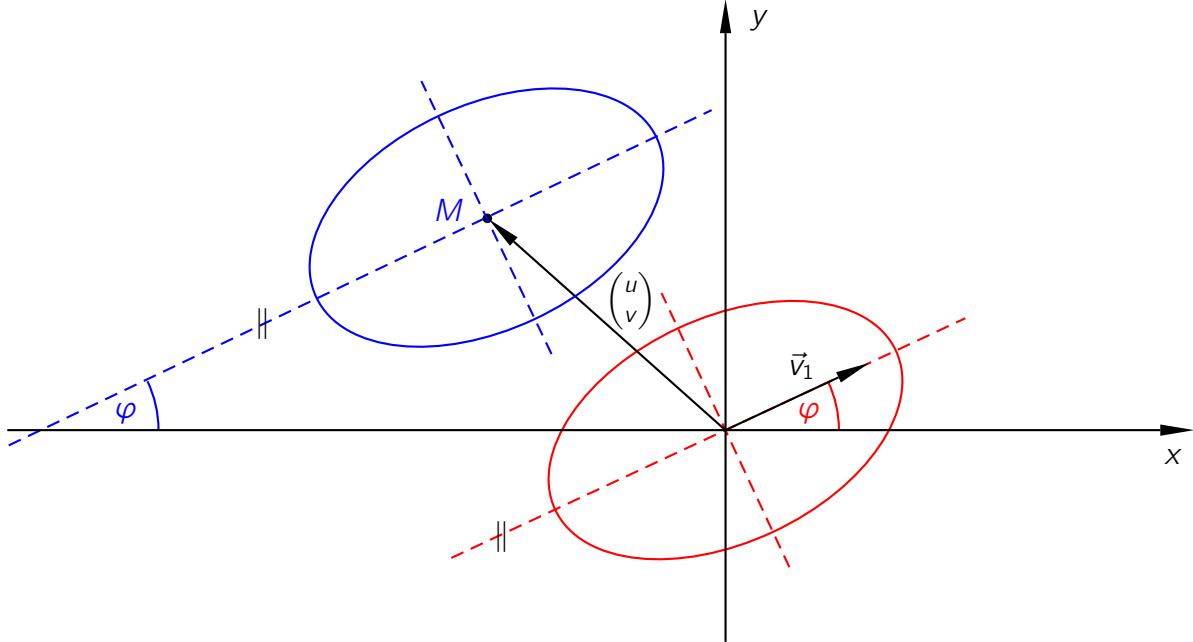


Nur im Sattelpunkt des hyperbolischen Paraboloids sind die beiden partiellen Ableitungen der quadratischen Form gleich null.

Es gilt also für $\det \neq 0$ immer

$$M = (u/v) = \left(\frac{h_1}{\det} / \frac{h_2}{\det} \right) \quad (34.2)$$

Damit ist die Translation in (32) bekannt. Wir kommen zur Bestimmung der Parameter d und e der Rotation.



Wenn B nicht null ist, stehen die Symmetrieachsen der Ellipse schief zu den Koordinatenachsen und wir können den Winkel φ der Rotation mithilfe des Eigenvektors \vec{v}_1 bestimmen. Beim Übergang von (8) zu (30) haben wir aber noch eine zusätzliche Drehung um 90° vorgenommen. Daher vertauschen sich die Rollen von $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ und wir erhalten für die Matrix der Rücktransformation

$$d = \cos(\varphi) = \frac{B}{|\vec{v}_1|} = \frac{B}{\sqrt{(A - \lambda_2)^2 + B^2}} \quad (35.1)$$

$$e = \sin(\varphi) = \frac{\lambda_2 - A}{|\vec{v}_1|} = \frac{\lambda_2 - A}{\sqrt{(A - \lambda_2)^2 + B^2}} \quad (35.2)$$

Wenn B null ist, können die Nenner in (35) auch null werden. Dieser Fall muss daher separat behandelt werden. Er ist aber besonders einfach, weil dann *keine* Rotation erforderlich ist oder aber eine Drehung um 90° .

Eine kleine Untersuchung zeigt, dass diese beiden Fälle durch das Vorzeichen von $\text{DET} \cdot (A - C)$ unterschieden werden können:

$$(B = 0 \text{ und } \text{DET} \cdot (A - C) \geq 0) \implies (d = 1 \text{ und } e = 0) \quad (36.1)$$

$$(B = 0 \text{ und } \text{DET} \cdot (A - C) < 0) \implies (d = 0 \text{ und } e = 1) \quad (36.2)$$

Im GeoGebra-Programm „ellipt_hyperbol.ggb“ wird diese Unterscheidung mithilfe der Variablen g vorgenommen.

Die Halbachsen der Ellipse sind schon in (31) bestimmt worden. Berechnen wir noch die lineare und die numerische Exzentrizität sowie das Quermass:

Für die lineare Exzentrizität gilt

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{-\text{DET}}{\det} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{-\text{DET}}{\det} \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \frac{-\text{DET} \cdot \text{diff}}{\det^2} \quad (37)$$

Daraus ergibt sich für die numerische Exzentrizität ϵ

$$\epsilon = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\frac{-\text{DET}}{\det} \cdot \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}}{\frac{-\text{DET}}{\det} \cdot \frac{1}{\lambda_2}}} = \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (38)$$

Für das Quermass p einer Ellipse gilt $p = \frac{b^2}{a}$, also

$$p^2 = \frac{b^4}{a^2} = \frac{\frac{\text{DET}^2}{(\lambda_1)^4 \cdot (\lambda_2)^2}}{\frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot (\lambda_2)^2}} = \frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}$$

Es gilt also dieselbe Formel wie bei der Parabel:

$$p = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}} \quad (39)$$

Damit können wir jetzt alle Bestimmungsstücke der Ellipse (1) aus den bekannten Werten der kongruenten Ellipse (30) berechnen und vom GeoGebra-Programm „ellipt_hyperbol.ggb“ zeichnen lassen.

Für die Hauptsymmetriearchse der Ellipse ergibt sich

$$d \cdot (y - v) = -e \cdot (x - u) \quad (40)$$

Die Nebensymmetriearchse wird beschrieben durch

$$e \cdot (y - v) = d \cdot (x - u) \quad (41)$$

Die beiden Brennpunkte sind bestimmt durch

$$\begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pm c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (42)$$

Genauso erhalten wir die Scheitelpunkte auf der Hauptsymmetriearchse

$$\begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (43)$$

Für die Nebenscheitelpunkte berechnen wir

$$\begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (44)$$

Die Leitgeraden sind parallel zur Nebensymmetriearchse, sie laufen durch die „Leipunkte“

$$\begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pm a/\epsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (45)$$

Der „entartete“ Fall mit $\text{DET} = 0$ bereitet keine Schwierigkeiten. Einzige Lösung von (30) ist dann der Punkt $(0/0)$. Dieser Punkt wird von der Rücktransformation auf $M = (u/v)$ abgebildet. $M = (u/v)$ ist dann die einzige Lösung von (1).

7 Die Details im hyperbolischen Fall

Das meiste von dem, was wir im elliptischen Fall gefunden haben, ist auch im hyperbolischen Fall gültig.

Ausgangspunkt ist wieder die Gleichung (30), nur haben jetzt die beiden Eigewerte λ_1 und λ_2 unterschiedliche Vorzeichen. Vergleichen wir (30) mit der Hyperbelgleichung in Mittelpunktslage, also mit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

so erhalten wir

$$a^2 = \frac{-\text{DET}}{\lambda_2 \cdot \det} = \frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot (\lambda_2)^2} \quad (46.1)$$

$$b^2 = \frac{+\text{DET}}{\lambda_1 \cdot \det} = \frac{\text{DET}}{(\lambda_1)^2 \cdot \lambda_2} \quad (46.2)$$

Einzig das Vorzeichen von b^2 hat einen andern Wert als im elliptischen Fall. Da bei Hyperbeln $c^2 = a^2 + b^2$ gilt, behalten aber alle Rechnungen, die wir bei den Ellipsen gemacht haben, ihre Gültigkeit. Bei Ellipsen gilt ja $c^2 = a^2 - b^2$.

Unverändert gilt auch

$$M = (u/v) = \left(\frac{h_1}{\det} / \frac{h_2}{\det} \right)$$

und auch die Werte von d und e für die Rotationsmatrix der Rücktransformationen können genau gleich berechnet werden. Es gibt daher auch nur ein einziges Programm „ellipt_hyperbol.ggb“, um die ausgezeichneten Punkte und Geraden einzzeichnen.

Bei den Ellipsen haben wir für $a^2 = b^2$ den Spezialfall eines Kreises. Es gilt dann $\lambda_1 = \lambda_2$.

Auch bei Hyperbeln kann $a^2 = b^2$ gelten, wenn $\lambda_1 = -\lambda_2$ gilt. In diesem Spezialfall hat die Hyperbel zwei zueinander senkrecht stehende Asymptoten. Der Fall tritt genau dann auf, wenn gilt $\text{spur} = 0$. Diese Bedingung ist ja äquivalent zu $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Die Asymptoten der Hyperbel werden in allen Fällen aus der Rücktransformation der beiden Geraden

$$y = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} \cdot x = \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot x \quad (47)$$

gewonnen.

Den „entarteten“ Fall mit $\text{DET} = 0$ haben wir schon im Abschnitt 4 auf der Seite 16 behandelt. Die Lösungen von (1) bestehen dann gerade aus dem Paar von Geraden, welches wir mit der Rücktransformation aus (47) erhalten. Die beiden Geraden schneiden sich in M , man braucht daher nur noch je einen weiteren Punkt von (47) abzubilden. Die Rollen von λ_1 und λ_2 sind gegenüber der Seite 16 vertauscht, weil wir neu von der Gleichung (30) ausgehen und nicht mehr von der Gleichung (8).

8 Visualisierung und Kontrolle mit GeoGebra

Die beiden Programme „ellipt_hyperbol.ggb“ und „parabol.ggb“ können frei von meiner Webseite „physastromath.ch/material/mathematik/geogebra/“ heruntergeladen werden. Sie brauchen eigentlich keine grossen Erläuterungen. Mittels Schiebereglern können die Parameter der quadratischen Gleichung eingestellt werden und der entsprechende Kegelschnitt wird vom GeoGebra-Befehl „Kegelschnitt“ sofort gezeichnet. Dazu werden dann die Brennpunkte, Hauptachsen, Leitgeraden und Asymptoten etc. nach unseren Formeln berechnet und eingezeichnet. Wären die Formeln falsch, so würden die entsprechenden Punkte und Geraden ganz quer in der Landschaft stehen (was sie natürlich zu beginn auch gemacht haben ...).

Die Variablennamen sind meist wie in den Abschnitten 2 bis 7 dieses Skriptums gewählt. GeoGebra unterscheidet Gross- und Kleinschreibung, und auch die Variablennamen D' und E' sind erlaubt. In wenigen Fällen weichen die Bezeichnungen dennoch von denjenigen im Skriptum ab :

p	der erste Eigenwert λ_1
q	der zweite Eigenwert λ_2
quer1	das Quermass p des Kegelschnitts
quer2	das Quermass p des Kegelschnitts
eps1	die numerische Exzentrizität ε
eps2	die numerische Exzentrizität ε

Einige Werte wie zum Beispiel die Exzentrizität und die spur werden zur Kontrolle auf verschiedene Arten berechnet.

Beim Programm „parabol.ggb“ kann der Wert von C nicht eingegeben werden. C wird aus den Werten von A und B so berechnet, dass $\det = A \cdot C - B^2 = 0$ gilt, damit man auch sicher im parabolischen Fall ist. Es ist also $C = B^2/A$, weshalb für $A = 0$ keine Parabel angezeigt wird.

Wenn Sie den Bereich oder die Feinheit der Schritte bei den Schiebereglern A bis F ändern wollen, brauchen Sie nur mit der rechten Maustaste darauf zu klicken. Es klappt ein Kontext-Menu auf; wählen Sie dort den untersten Eintrag „Eigenschaften“ und Sie können alle Vorgaben abändern.

Falls Sie eine Fehlfunktion finden, bitte ich Sie, mir diese mitzuteilen via gub@stafag.ch .

Tabelle 9.1

				Charakteristik	Exzentrizität ϵ
det > 0	DET · spur < 0	ein Kreis eine Ellipse	A = C und B = 0 A ≠ C	diff / λ_1 = 0 diff / λ_1 < 1	$\epsilon = 0$ $0 < \epsilon < 1$
	DET · spur = 0	---	---	---	2
	DET · spur > 0	die leere Menge	---	---	3
	DET · spur < 0	eine Parabel	---	---	4
	DET · spur = 0	---	---	diff / λ_1 = 1	$\epsilon = 1$
	DET · spur > 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	DET · spur < 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	DET · spur = 0	---	---	diff / λ_1 = 2	$\epsilon = \sqrt{2}$
	DET · spur > 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	DET · spur < 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
DET ≠ 0	det < 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	det = 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	det > 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	nicht entartet	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	---	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
DET = 0	det < 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	det = 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	det > 0	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	---	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
	---	---	---	diff / λ_1 > 1	$\epsilon > 1$
entartet	det > 0	1 Punkt	---	---	11
	---	2 parallele Geraden	D² > A·F oder E² > C·F	---	12
	---	1 Gerade	D² = A·F oder E² = C·F	---	13
---	det = 0	die leere Menge	D² < A·F oder E² < C·F	---	14
	det < 0	2 Geraden mit 1 Schnittpunkt	---	---	15

k = -sign(DET)	det = $\lambda_1 \cdot \lambda_2$	spur = $\lambda_1 + \lambda_2$	$\lambda_1 = 0.5 \cdot (\text{spur} + \text{diff})$	$\lambda_1 = 0.5 \cdot (A + C + k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2})$	$p = \sqrt{(-\text{DET})/\lambda_1^3}$	$\epsilon^2 = 1 - \lambda_2/\lambda_1$
diff = $k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2}$)	diff = $\lambda_1 - \lambda_2$	lambda_2 = $0.5 \cdot (\text{spur} - \text{diff})$	$\lambda_2 = 0.5 \cdot (A + C - k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2})$	$p^2 = -\text{DET}/\lambda_1^3$	$\epsilon^2 = \text{diff}/\lambda_1$	

Tabelle 9.2

				Charakteristik	Exzentrizität ε
elliptisch	DET $\neq 0$	DET \cdot spur < 0	ein Kreis eine Ellipse	A = C und B = 0 A \neq C	diff / $\lambda_1 = 0$ $\varepsilon = 0$
		DET \cdot spur = 0	---	diff / $\lambda_1 < 1$	$0 < \varepsilon < 1$
		DET \cdot spur > 0	die leere Menge	---	2
	DET = 0	1 Punkt			3
		DET \cdot spur < 0	eine Parabel	diff / $\lambda_1 = 1$	4
		DET \cdot spur = 0	---	---	11
parabolisch	DET $\neq 0$	DET \cdot spur > 0	---	---	5
		DET \cdot spur > 0	2 parallele Geraden	DET > A·F oder $E^2 > C·F$	6
		DET = 0	1 Gerade die leere Menge	DET = A·F oder $E^2 = C·F$	7
	DET = 0	DET \cdot spur < 0	eine Hyperbel	DET < A·F oder $E^2 < C·F$	12
		DET $\neq 0$	eine rechtwinklige Hyperbel	A = -C	13
		DET < 0	eine Hyperbel	diff / $\lambda_1 > 1$	14
hyperbolisch	DET $\neq 0$	DET \cdot spur = 0	2 Geraden mit 1 Schnittpunkt	diff / $\lambda_1 = 2$	8
	DET = 0	DET \cdot spur > 0		diff / $\lambda_1 > 1$	9

$k = -\text{sign}(\text{DET})$	$\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2$	$\text{spur} = \lambda_1 + \lambda_2$	$\lambda_1 = 0.5 \cdot (A + C + k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2})$	$p = \sqrt{-\text{DET}} / \lambda_1^3$	$\varepsilon^2 = 1 - \lambda_2 / \lambda_1$
$\text{diff} = k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2}$	$\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2$	$\text{spur} - \text{diff}$	$\lambda_2 = 0.5 \cdot (A + C - k \cdot \sqrt{(A - C)^2 + 4 \cdot B^2})$	$p^2 = -\text{DET} / \lambda_1^3$	$\varepsilon^2 = \text{diff} / \lambda_1$