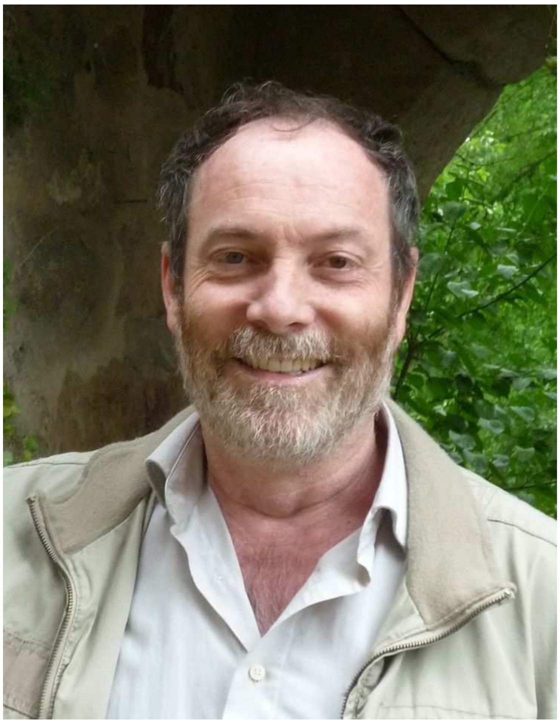
Ellipsen



Martin Gubler

zum 60. Geburtstag

mit herzlichen Glückwünschen
von Ihrer Mathematik-Schwerpunktfachklasse

Kantonsschule Frauenfeld, Frühlingssemester 2015

Vorbemerkung

Im Frühlingssemester 2015 bereiteten elf Schülerinnen und Schüler der Schwerpunktfachklasse Mathematik an der Kantonsschule Frauenfeld ein Unterrichtsmodul über die Ableitung der drei Keplerschen Gesetze aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz vor. Dieses Unterrichtsmodul bildete den wesentlichen Inhalt meines Erfahrungspraktikums im Fach Mathematik, das ich unter der Leitung von Martin Gubler durchführen konnte.

Angeleitet von Fragestellungen ihres Fachlehrers trug jede(r) Schüler(in) mindestens eine Ausarbeitung zu den Kapiteln des nachfolgenden Inhaltsverzeichnisses bei. Die weitgehend im Selbststudium erarbeiteten Ergebnisse und ihre vollständigen Herleitungen wurden in der Klasse präsentiert und diskutiert.

Die Zusammenfassung der inhaltlichen Aussagen, ihre stilistische Überarbeitung und Illustration erfolgt aus aktuellem Anlass. Ich danke allen beteiligten Schülerinnen und Schülern, besonders Rino Sogno, für die Unterstützung und diskrete Mitarbeit.

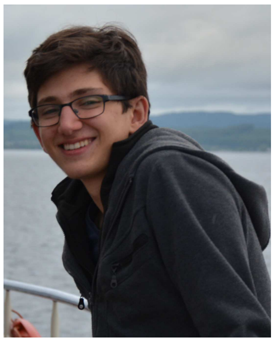
Ralf Vanscheidt

Zofingen im April 2015

Corentin Pfister

Eliane Berchtold

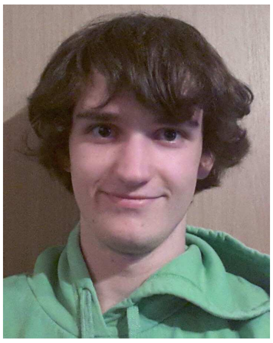
Jela Kovacevic



Lucas Habersaat

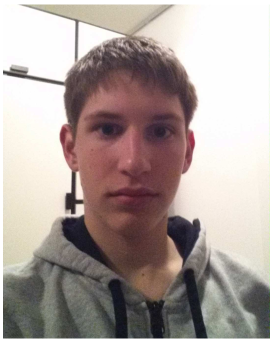
Marco Fridle

Matthias Blum



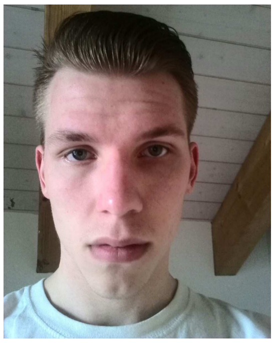
Nathanael Gall

Rino Sogno



Severin Weber

Tennessee von Streng



Yannik Martin

Inhaltsverzeichnis

1 Definitionen und Bezeichungen

Ausgehend vom Einheitskreis $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ führen die Koordinatentransformationen $x \mapsto \frac{x}{r}$ und $y \mapsto \frac{y}{r}$ zu einer Streckung in x– und y–Richtung um den Faktor r. Verwendet man für die Streckung in x–Richtung den Streckfaktor a, für die Streckung in y–Richtung den Streckfaktor b, so erhält man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

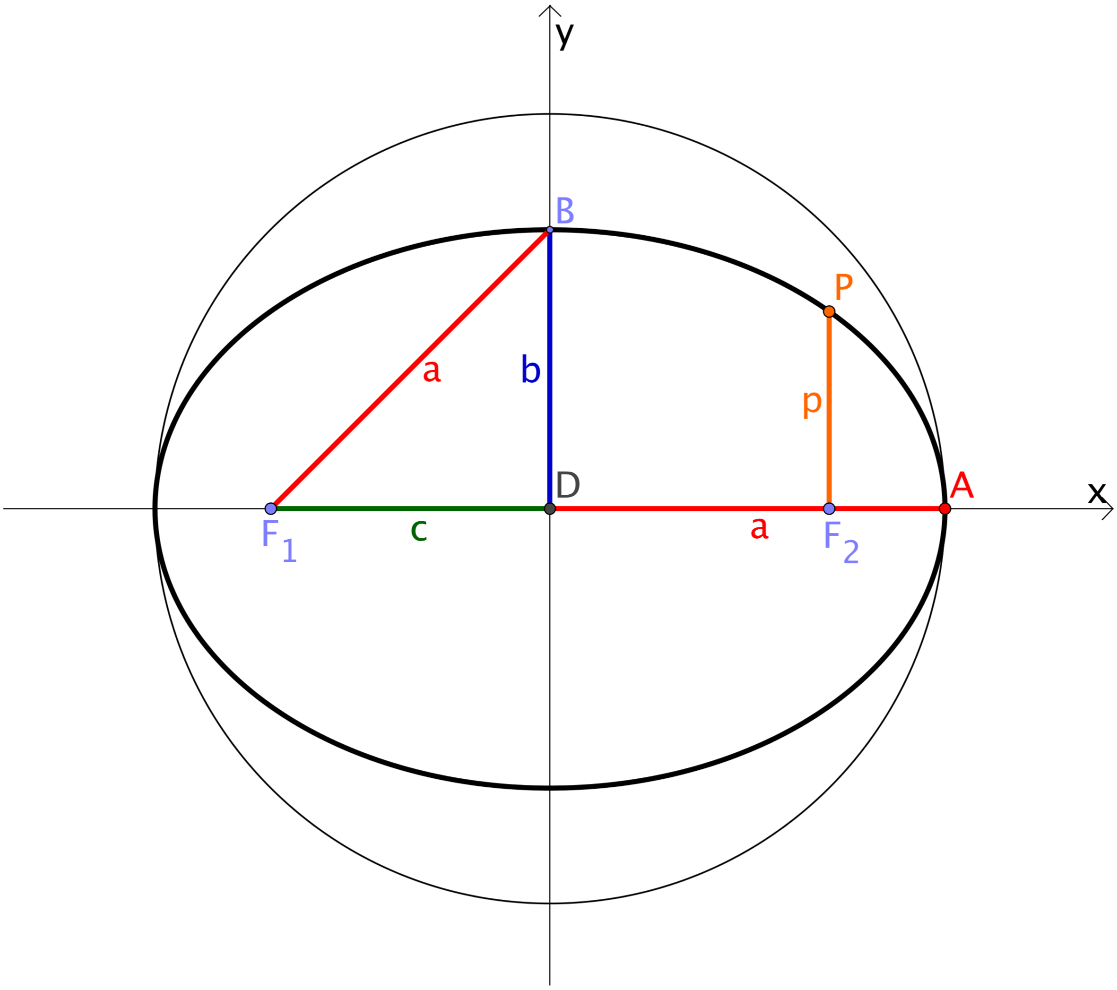


Abbildung 1: Die Grundgrössen einer Ellipse

Die Menge aller Punkte (x, y), die Gleichung (1) erfüllen, bilden eine Ellipse. Man nennt Gleichung (1) daher Ellipsengleichung (in kartesischen Koordinaten).
Wir können nachfolgend stets $a > b$ annehmen. Andernfalls vertauscht man x und y.
Die Ellipse besitzt zwei Brennpunkte F_1 und F_2, die durch

$$\overline{BF_1} = \overline{BF_2} = a \tag{2}$$

definiert sind, wobei $B = (0, b)$ ist. Man nennt a die grosse und b die kleine Halbachse der Ellipse. Definiert man c durch

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{3}$$

so besitzen die Brennpunkte die Koordinaten

$$F_1 = (-c, 0) \quad \text{und} \quad F_2 = (c, 0) \tag{4}$$

Man nennt c die lineare Exzentrizität der Ellipse. Der dimensionslose Parameter

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{5}$$

wird numerische Exzentrizität genannt. Es gilt:

$$\varepsilon = 0 \iff c = 0 \iff a = b \iff \text{Die Ellipse ist ein Kreis.} \tag{6}$$

Für "echte" Ellipsen gilt $0 < c < a \iff 0 < \varepsilon < 1$.
Ellipsenpunkte mit x–Koordinaten $\pm c$ besitzen die y–Koordinaten $\pm p$. Man nennt p das Quermass (oder den Parameter) der Ellipse.

2 Ellipseneigenschaften

Nach (3) gilt:

$$
\begin{aligned}
& c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad | \text{ quadrieren} \\
\Rightarrow\ & b^2 = a^2 - c^2 \quad | \ c = \varepsilon a \text{ nach (5) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & b^2 = a^2 - (\varepsilon a)^2 \quad | \text{ ausklammern} \\
\Rightarrow\ & b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) \quad | \text{ Wurzel ziehen} \\
\Rightarrow\ & b = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Der Punkt $P = (c, p)$ liegt auf der Ellipse. Nach (1) folgt damit:

$$
\begin{aligned}
& \frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \quad | \cdot a^2 b^2 \\
\Rightarrow\ & b^2 c^2 + p^2 a^2 = a^2 b^2 \quad | \ c = \varepsilon a \text{ nach (5) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & b^2 (\varepsilon a)^2 + p^2 a^2 = a^2 b^2 \quad | : a^2 \neq 0 \\
\Rightarrow\ & b^2 \varepsilon^2 + p^2 = b^2 \quad | -b^2 \varepsilon^2, \text{ ausklammern} \\
\Rightarrow\ & p^2 = b^2 (1 - \varepsilon^2) \quad | \ b^2 \text{ gemäss (7) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & p^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2) \quad | \text{ Wurzel ziehen} \\
\Rightarrow\ & p = a(1 - \varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{8}
$$

Multiplikation von (8) mit a liefert:

$$
\begin{aligned}
& ap = a^2(1 - \varepsilon^2) \quad | \ b^2 \text{ gemäss (7) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & ap = b^2
\end{aligned} \tag{9}
$$

Der Einheitskreis besitzt den Flächeninhalt $1^2\pi$. Eine Streckung in x–Richtung um den Faktor a, in y–Richtung um den Faktor b liefert für den Flächeninhalt A der Ellipse:

$$
A = ab\pi \tag{10}
$$

Alternativ erhält man (10) durch Integration. Löst man (1) nach y auf, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
& y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad | \text{ Integration} \\
\Rightarrow\ & A = 2 \frac{b}{a} \cdot \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\ dx \quad | \text{ Stammfunktion einsetzen} \\
\Rightarrow\ & A = 2 \frac{b}{a} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) \right]_{-a}^{a} \quad | \pm a \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow\ & A = \frac{b}{a} \cdot \left[\left(a^2 \cdot \arcsin(1)\right) - \left(a^2 \cdot \arcsin(-1)\right) \right] \quad | \ \arcsin(\pm 1) = \pm \tfrac{\pi}{2} \\
\Rightarrow\ & A = \frac{b}{a} \cdot \left[2a^2 \frac{\pi}{2} \right] \quad | \text{ kürzen} \\
\Rightarrow\ & A = ab\pi
\end{aligned} \tag{11}
$$

3 Gärtnerkonstruktion

Gegeben sei eine Ellipse mit den Halbachsen a und b und den Brennpunkten F_1 und F_2. Dann gilt für jeden Punkt $P = (x, y)$ der Ellipse:

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a \tag{12}$$

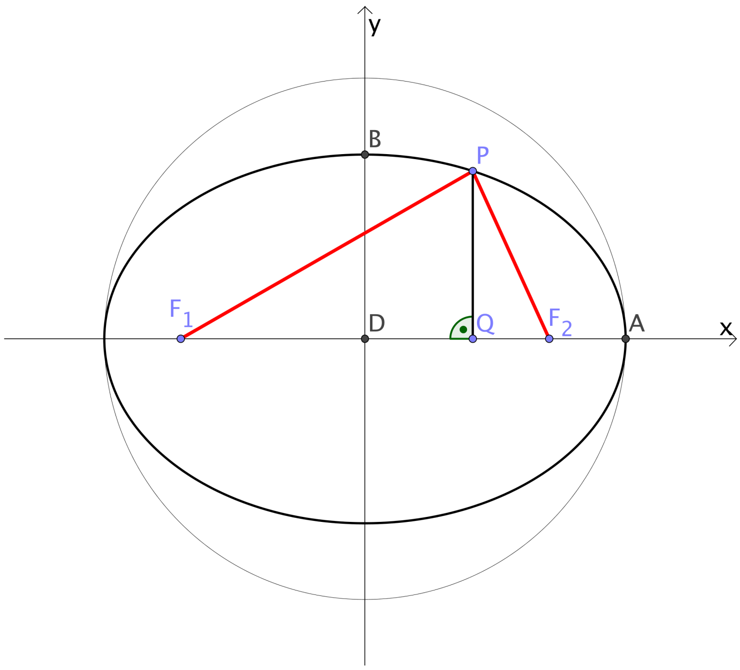


Abbildung 2: Ansatz der Gärtnerkonstruktion

Bezeichnet Q die Projektion von P auf die x–Achse, so gilt im rechtwinkligen Dreieck F_1PQ nach Pythagoras:

$$\begin{aligned}
& \overline{F_1P}^{\,2} = \overline{F_1Q}^{\,2} + y^2 \quad | \ F_1Q = x + c \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_1P}^{\,2} = (x+c)^2 + y^2 \quad | \ c = \varepsilon a \text{ nach (5) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_1P}^{\,2} = (x+\varepsilon a)^2 + y^2 \quad | \ y^2 = b^2 - \tfrac{b^2}{a^2}x^2 \text{ nach (1) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_1P}^{\,2} = (x+\varepsilon a)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad | \ b^2 \text{ nach (7) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_1P}^{\,2} = (x+\varepsilon a)^2 + a^2(1-\varepsilon^2) - x^2(1-\varepsilon^2) \quad | \text{ Ausmultiplizieren} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_1P}^{\,2} = x^2 + 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + \varepsilon^2x^2 \quad | \text{ Vereinfachen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_1P}^{\,2} = a^2 + 2a\varepsilon x + (\varepsilon x)^2 \quad | \text{ Binomi} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_1P}^{\,2} = (a+\varepsilon x)^2
\end{aligned} \tag{13}$$

Analog erhält man im rechtwinkeligen Dreieck F_2PQ:

$$
\begin{aligned}
& \overline{F_2P}^{\,2} = \overline{F_2Q}^{\,2} + y^2 \quad | \ F_2Q = c - x \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_2P}^{\,2} = (c-x)^2 + y^2 \quad | \ c = \varepsilon a \text{ nach (5) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_2P}^{\,2} = (\varepsilon a - x)^2 + y^2 \quad | \ y^2 = b^2 - \tfrac{b^2}{a^2}x^2 \text{ nach (1) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_2P}^{\,2} = (\varepsilon a - x)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad | \ b^2 \text{ nach (7) einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_2P}^{\,2} = (\varepsilon a - x)^2 + a^2(1-\varepsilon^2) - x^2(1-\varepsilon^2) \quad | \text{ Ausmultiplizieren} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_2P}^{\,2} = x^2 - 2a\varepsilon x + a^2\varepsilon^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + \varepsilon^2x^2 \quad | \text{ Vereinfachen} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_2P}^{\,2} = a^2 - 2a\varepsilon x + (\varepsilon x)^2 \quad | \text{ Binomi} \\
\Rightarrow\ & \overline{F_2P}^{\,2} = (a - \varepsilon x)^2
\end{aligned} \tag{14}
$$

Damit erhält man aus den Gleichungen (13) und (14):

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = (a - \varepsilon x) + (a - \varepsilon x) = 2a \tag{15}$$

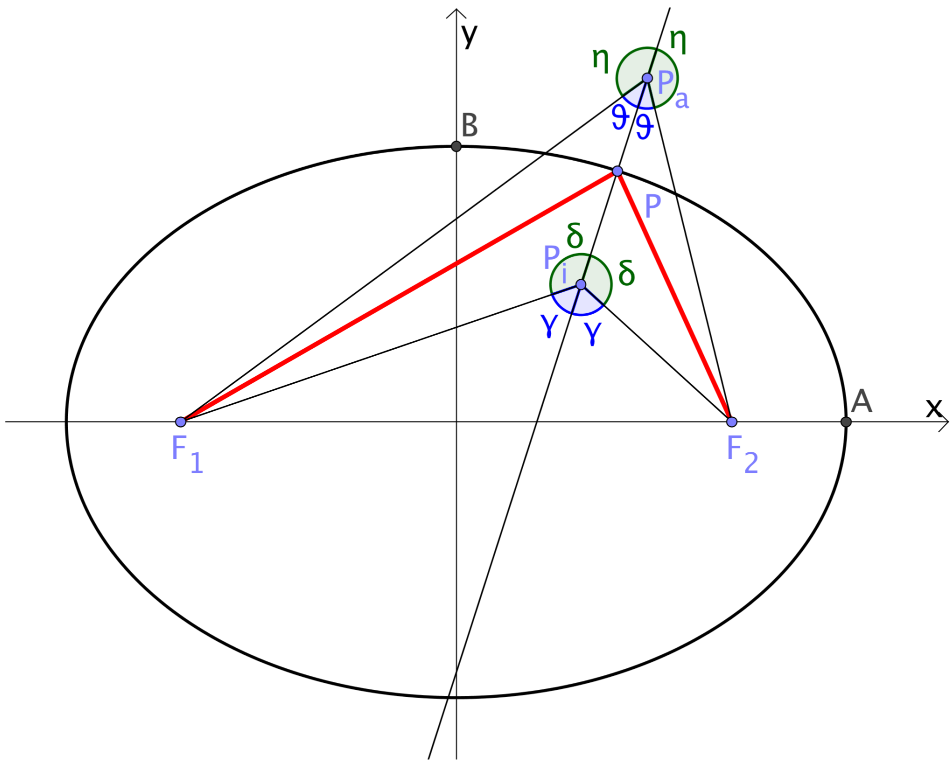


Abbildung 3: Die Winkelhalbierende

Wir zeigen ferner: Für alle Punkte P_i im Inneren der Ellipse gilt

$$\overline{F_1P_i} + \overline{F_2P_i} < 2a \tag{16}$$

und entsprechend für alle Punkte P_a ausserhalb der Ellipse:

$$\overline{F_1P_a} + \overline{F_2P_a} > 2a \tag{17}$$

zu (16): Die Winkelhalbierende des Winkels $2\gamma := \sphericalangle(F_1P_iF_2)$ schneide die Ellipse im Punkt P. Da $2\gamma \leq 180°$ folgt $\gamma \leq 90°$ und somit $\delta := 180° - \gamma \geq 90°$. Damit gilt im Dreieck F_1P_iP nach dem Kosinussatz:

$$\overline{F_1P} = \sqrt{\overline{F_1P_i}^2 + \underbrace{\overline{PP_i}^2}_{>0} \underbrace{-2\overline{F_1P_i} \cdot \overline{PP_i} \cdot \cos(\delta)}_{\geq 0}} > \overline{F_1P_i}$$

Analog

$$\overline{F_2P} = \sqrt{\overline{F_2P_i}^2 + \underbrace{\overline{PP_i}^2}_{>0} \underbrace{-2\overline{F_2P_i} \cdot \overline{PP_i} \cdot \cos(\delta)}_{\geq 0}} > \overline{F_2P_i}$$

und damit

$$\overline{F_1P_i} + \overline{F_2P_i} < \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$$

zu (17): Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle(F_1P_aF_2)$ schneide die Ellipse erneut im Punkt P. Da der Winkel $2\vartheta := \sphericalangle(F_1PF_2) \leq 180°$ ist $\vartheta \leq 90°$ und damit $\eta := \sphericalangle(F_1PP_a) = \sphericalangle(F_2PP_a) \geq 90°$. Damit gilt im Dreieck F_1P_aP nach dem Kosinussatz:

$$\overline{F_1P_a} = \sqrt{\overline{F_1P}^2 + \underbrace{\overline{PP_a}^2}_{>0} \underbrace{-2\overline{F_1P} \cdot \overline{PP_a} \cdot \cos(\eta)}_{\geq 0}} > \overline{F_1P}$$

Analog

$$\overline{F_2P_a} = \sqrt{\overline{F_2P}^2 + \underbrace{\overline{PP_a}^2}_{>0} \underbrace{-2\overline{F_2P} \cdot \overline{PP_a} \cdot \cos(\eta)}_{\geq 0}} > \overline{F_2P}$$

und damit

$$\overline{F_1P_a} + \overline{F_2P_a} > \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$$

Ein Punkt P liegt demnach genau dann auf einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1, F_2 und der grossen Halbachse a, falls gilt: $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$

4 Brennpunkt– und Scheitelpunktform der Ellipsengleichung

Gleichung (1) beschreibt eine Ellipse mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Eine Translation um c nach rechts verlegt den Brennpunkt F_1 in den Koordinatenursprung. Die daraus resultierende Ellipsengleichung nennt man Brennpunktsgleichung. Es gilt:

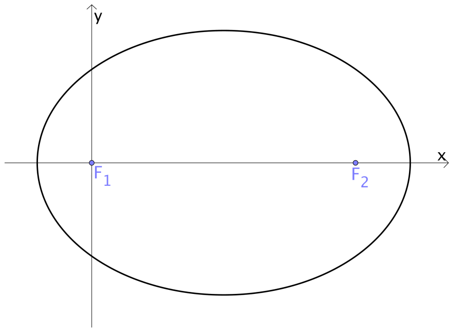
$$\begin{aligned}
& \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad | \text{ Translation um } c \text{ nach rechts} \\
\Rightarrow\quad & \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad | \cdot a^2b^2 \\
\Rightarrow\quad & b^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad | : a^2 \\
\Rightarrow\quad & \frac{b^2}{a^2}(x-c)^2 + y^2 = b^2 \quad | \ \tfrac{b^2}{a^2} = \tfrac{p}{a} \text{ nach (9) einsetzen} \\
\Rightarrow\quad & \frac{p}{a}(x-c)^2 + y^2 = b^2 \quad | \text{ (9) einsetzen} \\
\Rightarrow\quad & \frac{p}{a}(x-c)^2 + y^2 = ap \quad | -\tfrac{p}{a}(x-c)^2 \\
\Rightarrow\quad & y^2 = ap - \frac{p}{a}(x-c)^2 \qquad (18)
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ erhalten wir wie gewünscht:

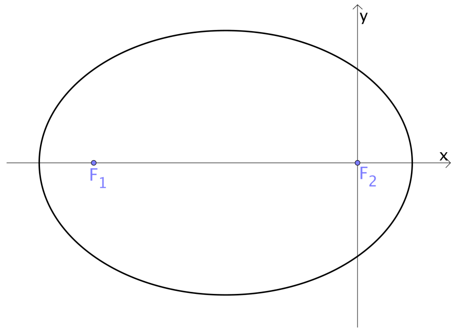
$$y^2 \overset{(18)}{=} ap - \frac{p}{a}c^2 = p\left(a - \frac{c^2}{a}\right) \overset{(3)}{=} p \cdot \frac{a^2 - a^2 + b^2}{a} \overset{(9)}{=} p \cdot \frac{b^2}{a} = p^2$$

Eine Translation um a nach rechts verlegt einen Scheitelpunkt der Ellipse in den Koordinatenursprung. Die daraus resultierende Ellipsengleichung nennt man Scheitelpunktsgleichung. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad | \text{ Translation um } a \text{ nach rechts} \\
\Rightarrow\quad & \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad | \cdot a^2b^2 \\
\Rightarrow\quad & b^2(x-a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad | \text{ Binomi} \\
\Rightarrow\quad & b^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad | -a^2b^2 \\
\Rightarrow\quad & b^2x^2 - 2ab^2x + a^2y^2 = 0 \quad | -b^2x^2 + 2ab^2x \\
\Rightarrow\quad & a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2 \quad | : a^2 \\
\Rightarrow\quad & y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 \quad | \ \tfrac{b^2}{a} = p \text{ nach (9)} \\
\Rightarrow\quad & y^2 = 2px - \frac{p}{a}\,x^2 \qquad (19)
\end{aligned}$$



Brennpunktlage in F_1



Brennpunktlage in F_2

Abbildung 4: Die Brennpunktlage

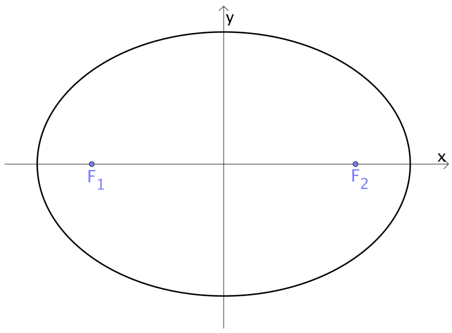
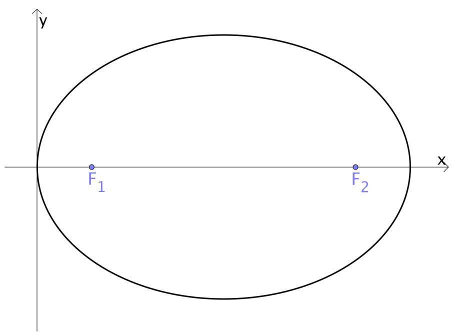
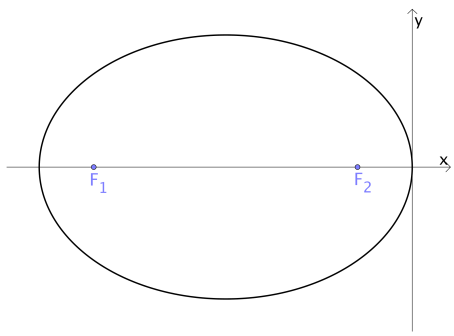


Abbildung 5: Die Mittelpunktslage



Scheitelpunktslage in S_1



Scheitelpunktslage in S_2

Abbildung 6: Die Scheitelpunktslage

5 Fähnchenkonstruktion der Ellipse

Aus der Parameterdarstellung des Einheitskreises $\{(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) : \varphi \in \mathbb{R}\}$ gewinnt man durch Streckung in x–Richtung um a und Streckung in y–Richtung um b die entsprechende Darstellung aller Ellipsenpunkte $\{(a \cdot \cos(\varphi), b \cdot \sin(\varphi)) : \varphi \in \mathbb{R}\}$. Für einen beliebigen Winkel φ erhält man daher den entsprechenden Ellipsenpunkt P als Schnittpunkt der senkrechten Geraden $x = a \cdot \cos(\varphi)$ und der waagerechten Geraden $y = b \cdot \sin(\varphi)$. Die Geraden schneiden die konzentrischen Kreise um $(0, 0)$ mit Radien b und a in den Punkten B bzw. A. Zu jedem Winkel φ lässt sich also ein Punkt P der Ellipse konstruieren.

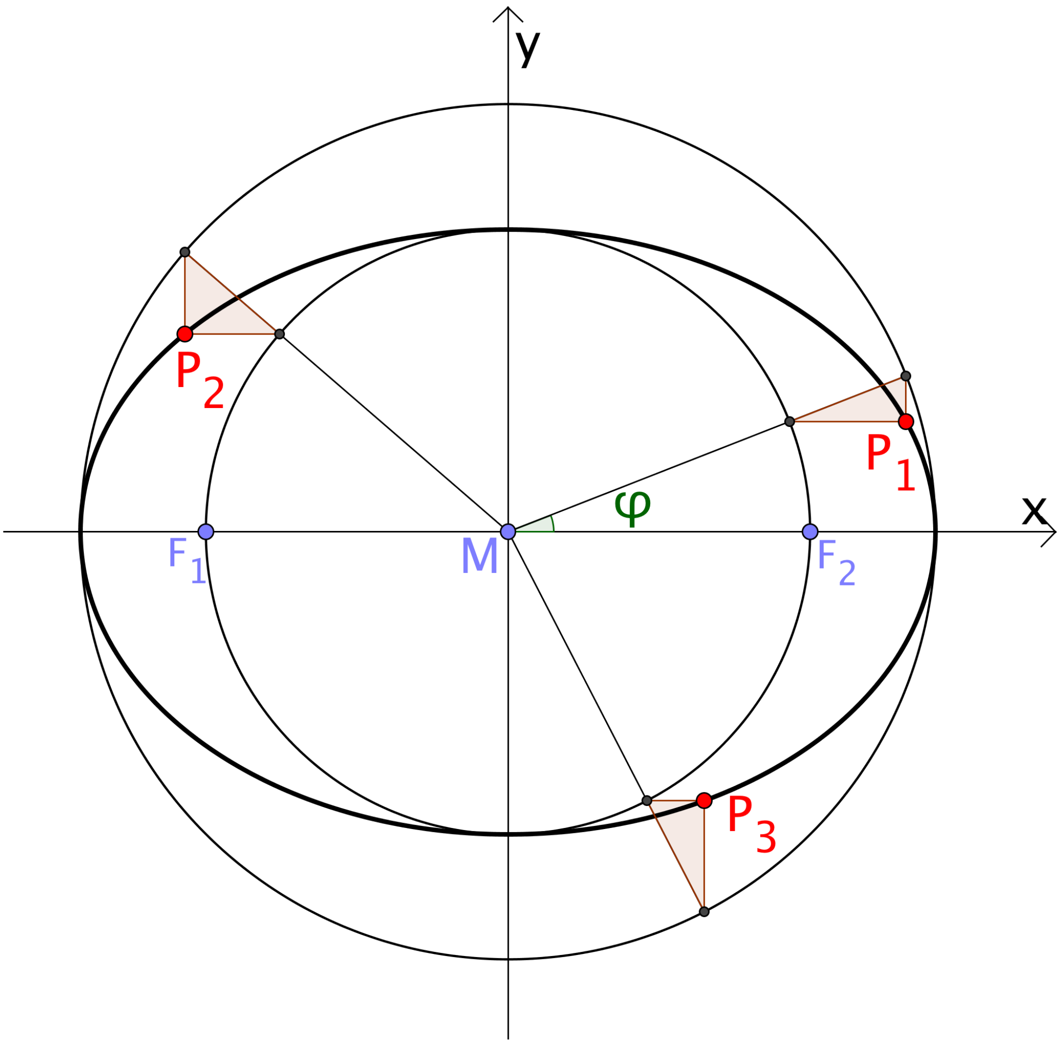


Abbildung 7: Illustration der Fähnchen an drei Ellipsenpunkten P_1, P_2 und P_3

6 Dandelinsche Kugeln

Schneidet man die Oberfläche eines Doppelkegels mit einer beliebigen Ebene im Raum, so erhält man einen Kegelschnitt.

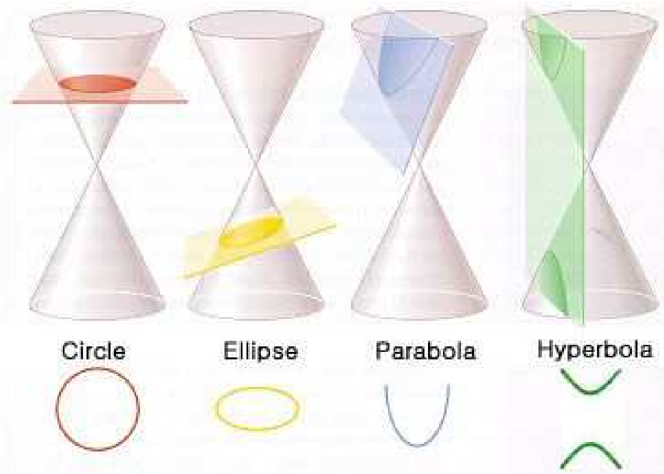


Abbildung 8: Vier verschiedene Kegelschnitte [1]

Wir betrachten den Spezialfall, in dem die gemeinsame Schnittmenge von Kegel und Ebene eine nicht kreisförmige geschlossene Kurve darstellt. Man stelle sich einen senkrecht nach oben geöffneten Hohlkegel vor, in den nacheinander zuerst eine kleinere, dann eine grössere Kugel gelegt werden, sodass diese sich nicht berühren. Die kleinere Kugel berührt den Kegel in einem Kreis k_1, die grössere Kugel in einem Kreis k_2. Im Raum zwischen den Kugeln denke man sich nun eine zunächst waagerechte Ebene. Die Ebene wird nun geneigt, bis sie die kleinere Kugel im Punkt F_1, die grössere Kugel im Punkt F_2 berührt.
Sei P ein beliebiger Punkt der gemeinsamen Schnittmenge von geneigter Ebene und Kegel. Durch die Kegelspitze und P ist eine Mantellinie D_P festgelegt, die die Kreise k_1 bzw. k_2 in den Punkten A_1 bzw. A_2 schneiden. Da von einem gegebenen Punkt alle Tangentenabschnitte an eine Kugel gleich lang sind, gilt:

$$\overline{PF_1} = \overline{PA_1} \quad \text{und} \quad \overline{PF_2} = \overline{PA_2} \tag{20}$$

Damit ist die Summe

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PA_1} + \overline{PA_2} = \overline{A_1A_2} \quad \text{unabhängig von } P. \tag{21}$$

Alle Punkte der gemeinsamen Schnittmenge von geneigter Ebene und Kegel erfüllen bezüglich F_1 und F_2 die Bedingung der Gärtnerkonstruktion. Daher ist diese Schnittmenge eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2.

[1]http://www.mathe-online.at, 15. März 2015
[2]http://accromath.uqam.ca/, 15. März 2015

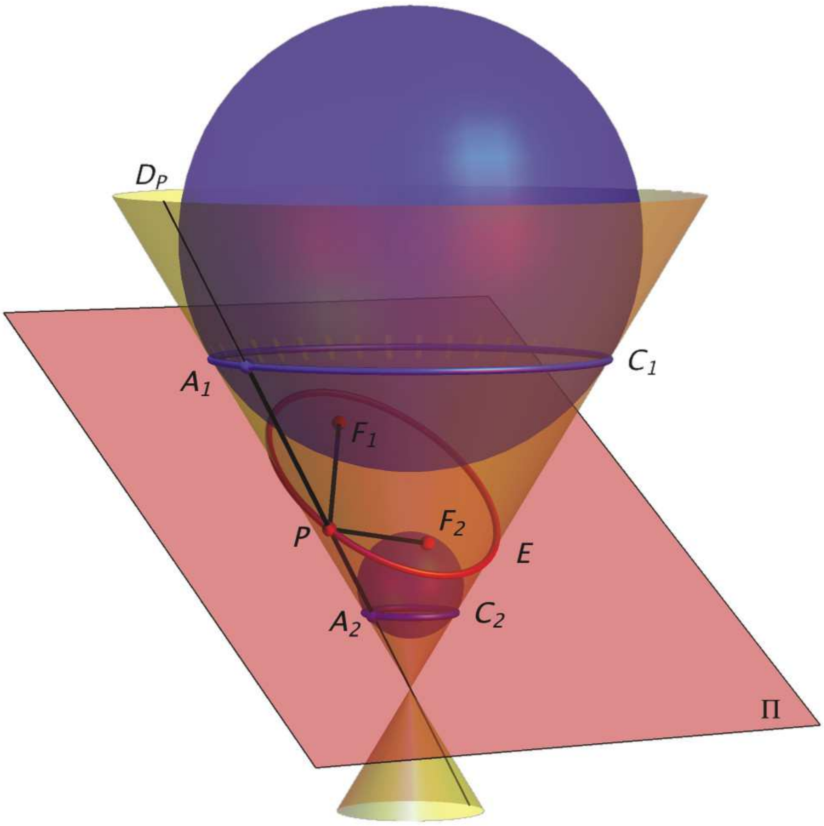


Abbildung 9: Die zwei dandelinschen Kugeln [2]

7 Tangente einer Ellipse

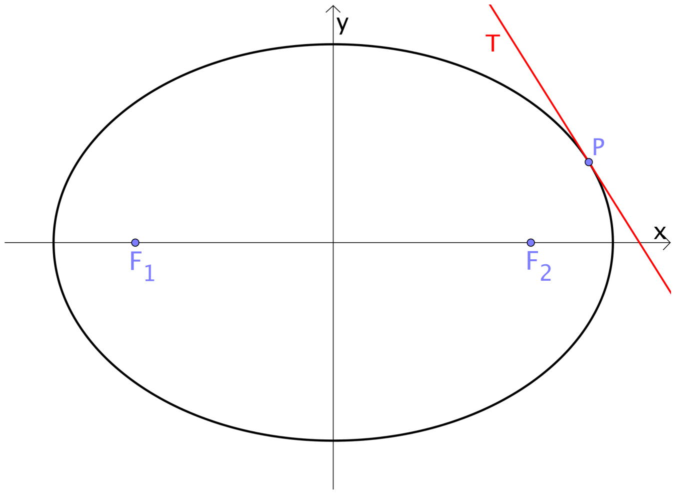


Abbildung 10: Die Tangente im Punkt P an die Ellipse

Zur Bestimmung der Gleichung einer Tangente im Punkt $P = (x_0, y_0)$ einer Ellipse lösen wir zunächst (1) nach y^2 auf und erhalten:

$$\begin{aligned}
& y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad \Big| \tfrac{d}{dx} \\
\Rightarrow \quad & 2yy' = -2\frac{b^2}{a^2} x \quad \Big| : 2y \\
\Rightarrow \quad & y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \quad \Big| \; P \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0} \quad \text{ist die Tangentensteigung im Punkt } P
\end{aligned} \tag{22}$$

Wir setzen nun die Koordinaten von P in die allgemeine Form einer Tangentengleichung d.h. einer linearen Gleichung $y = mx + q$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
& y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0} x_0 + q \quad \Big| + \tfrac{b^2}{a^2}\tfrac{x_0^2}{y_0} \\
\Rightarrow \quad & q = y_0 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0^2}{y_0} \quad \Big| \; \text{Einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & y = \underbrace{-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}}_{=m} \cdot x + \underbrace{y_0 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0^2}{y_0}}_{=q}
\end{aligned} \tag{23}$$

Eine alternative Tangentenbestimmung beruht auf der bei Kegelschnitten universell einsetzbaren Methode des Polarisierens. Wir erläutern die Begriffe Pol und Polare sowie ihren mathematischen Zusammenhang am Beispiel des Kreises.
Gegeben sei ein Kreis k und ein Punkt P in der Ebene. Dann liegt P entweder ausserhalb, auf oder innerhalb des Kreises.

1. Fall: P liegt ausserhalb von k
Die Tangenten an k durch P berühren k in den Punkten Q_1, Q_2. Man nennt die Gerade durch Q_1, Q_2 die Polare zum Pol P bezüglich k.

2. Fall: P liegt auf k
In diesem Fall existiert nur noch eine Tangente an k durch P. Liegt P auf dem Kreis, so ist die Polare zum Pol P identisch mit der Tangente durch P.

3. Fall: P liegt innerhalb von k
Zwei beliebige Sekanten durch P schneiden k in den Punkten Q_1, Q_2 und Q_3, Q_4. Die Tangenten an k durch Q_1, Q_2 schneiden sich im Punkt R_1, die Tangenten an k durch Q_3, Q_4 schneiden sich im Punkt R_2. Man nennt nun die Gerade durch R_1, R_2 die Polare zum Pol P bezüglich k.

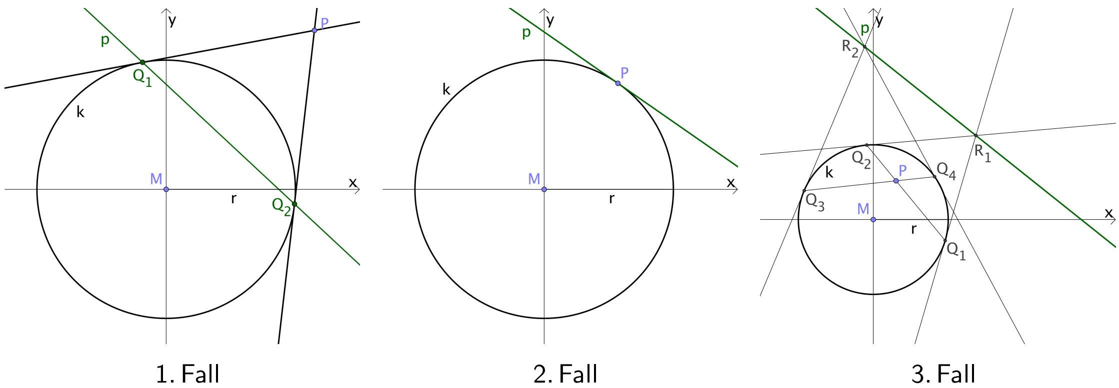


Abbildung 11: Das Polarisieren am Kreis

Zur Herleitung der Tangentengleichung (2. Fall) sei k mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r gegeben. $P = (x_0, y_0)$ liege auf K und $Q = (x, y)$ sei ein beliebiger Punkt auf der Tangente durch P an k.
Da der Radiusvektor $\overrightarrow{MP}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ der Tangenten steht, gilt für das Skalarprodukt:

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \tag{24}$$

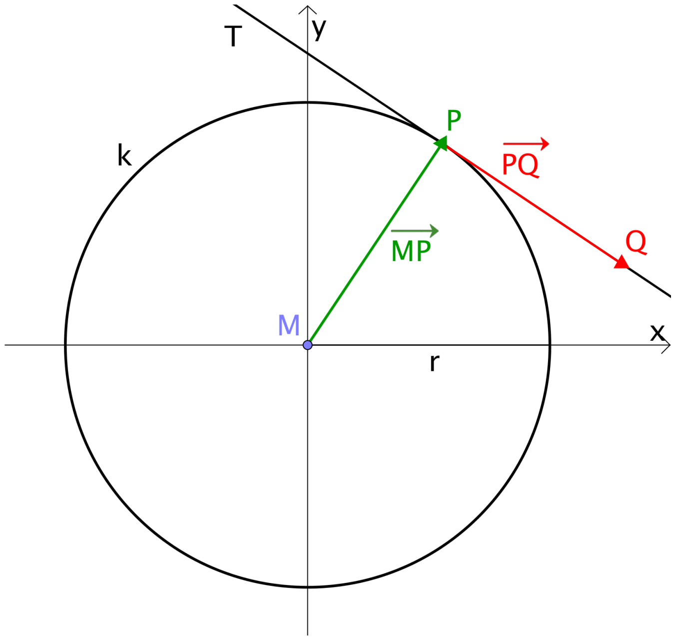


Abbildung 12: Polarisation des Kreises mit P

Andererseits liefert die Kreisbedingung:

$$\left(\overrightarrow{MP}\right)^2 = r^2 \tag{25}$$

Addiert man die linke bzw. rechte Seite von (25) in (24), so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PQ} + \left(\overrightarrow{MP}\right)^2 = r^2 \quad | \text{ Distributivgesetz} \\
\Rightarrow \quad & \overrightarrow{MP} \cdot \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{MP}\right) = r^2 \quad | \text{ Vektoraddition} \\
\Rightarrow \quad & \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = r^2 \quad | \ M, P, Q \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & x_0 x + y_0 y = r^2
\end{aligned} \tag{26}$$

Im Fall der Tangentengleichung an eine Ellipse verfahren wir analog. Dazu setzen wir den Punkt $P = (x_0, y_0)$ gemäss (26) in (1) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
& \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad | \cdot a^2 b^2 \\
\Rightarrow \quad & x_0 x b^2 + y_0 y a^2 = a^2 b^2 \quad | -x_0 x b^2 \\
\Rightarrow \quad & y_0 y a^2 = -x_0 x b^2 + a^2 b^2 \quad | : (a^2 y_0) \\
\Rightarrow \quad & y = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} \cdot x + \frac{b^2}{y_0}
\end{aligned} \tag{27}$$

Vergleicht man (27) mit (23), so genügt es zu zeigen, dass $q = \frac{b^2}{y_0}$ ist. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& q = \frac{b^2}{y_0} \quad | \text{ (23)} \\
\Leftrightarrow \quad & y_0 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0^2}{y_0} = \frac{b^2}{y_0} \quad | \cdot \frac{y_0}{b^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad | \text{ ist erfüllt wegen (1)}
\end{aligned} \tag{28}
$$

Wir erhalten also eine Tangentengleichung (27) im Punkt P einer Ellipse durch die Berechnung der Polaren zum Punkt P.

8 Brennpunkteigenschaft

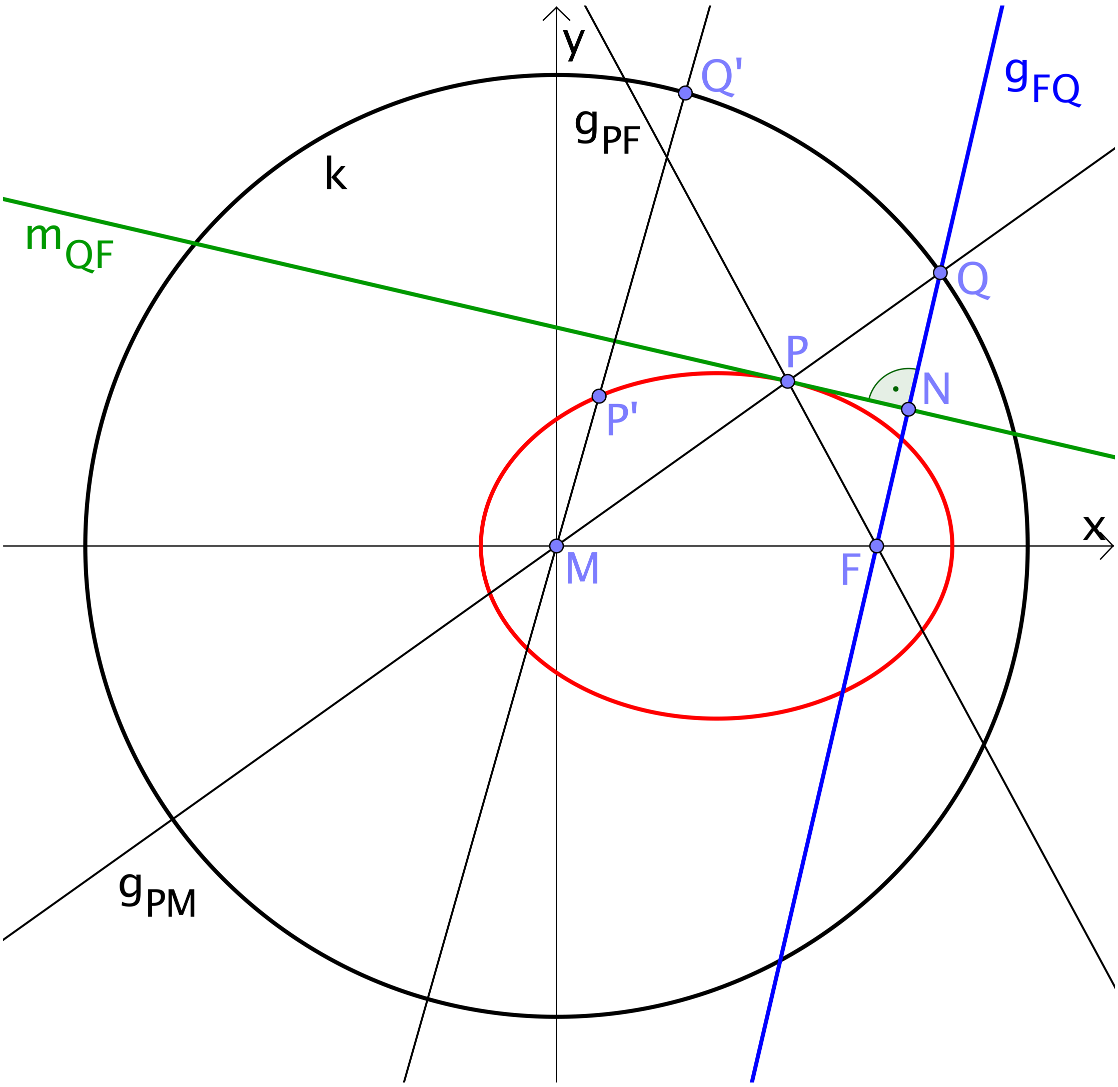


Abbildung 13: Gegeben sei ein Punkt Q auf einem Kreis (schwarz) k mit Mittelpunkt M sowie ein Punkt F im Inneren von k. m_{QF} sei die Mittelsenkrechte (grün) der Strecke $\overline{QF}$. Ein Punkt P der zugehörigen Ellipse (rot) ist der Schnittpunkt von m_{QF} mit der Geraden durch M und Q.

Gemäss Abbildung 13 lassen sich alle Punkte einer Ellipse mit Hilfe eines Leitkreises k und einem inneren Kreispunkt F konstruieren. Die Mittelsenkrechte m_{QF} ist dabei die Tangente an die Ellipse im Punkt P.
Denn angenommen, es gäbe einen weiteren Ellipsenpunkt P' auf m_{QF}. Bezeichnet Q'

den entsprechenden Lotfusspunkt von P' auf k, so müsste gelten:

$$\overline{FP'} = \overline{Q'P'}$$

Da $P' \in m_{QF}$ hat P' denselben Abstand zu F und zu Q, also:

$$\overline{FP'} = \overline{QP'}$$

Daraus folgt $\overline{QP'} = \overline{Q'P'}$ d.h. die Länge zweier Lote vom Punkt P' auf den Kreis k sind gleich. Dies kann nur für den Kreismittelpunkt M gelten. Da M einen Brennpunkt der Ellipse darstellt, ist $M = P'$ unmöglich. Also berührt die Mittelsenkrechte m_{QF} die Ellipse in genau einem Punkt und ist demnach eine Tangente.
Die Brennpunkteigenschaft einer Ellipse bedeutet, dass ein vom Punkt F einfallender Strahl im Punkt P so reflektiert wird, dass der ausfallende Strahl durch M verläuft. Gemäss dem physikalischen Reflexionsgesetz *Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel* muss man zeigen, dass die Geraden g_{PF} und g_{PM} mit der Tangenten m_{QF} den gleichen Winkel einschliessen. Dies sieht man so: Die Dreiecke PFN und PQN stimmen in drei Seiten überein. Es gilt $\overline{FN} = \overline{NQ}$, da $N \in m_{QF}$. Ferner ist P so gewählt, das $\overline{PQ} = \overline{PF}$ ist. Die dritte Seite $\overline{PN}$ ist schliesslich beiden Dreiecken gemeinsam. Daher ist der Einfallswinkel $\sphericalangle(FPN)$ gleich dem Winkel $\sphericalangle(QPN)$. Der Ausfallwinkel entspricht dann dem zu $\sphericalangle(QPN)$ gehörigen, gleich grossen Scheitelwinkel.
Man verwendet diese Eigenschaft der Ellipse unter anderem in der Lichtschweisstechnik, bei der die Wärmestrahlung einer Infrarotquelle im einen Brennpunkt durch einen elliptischen Reflektor im anderen Brennpunkt fokussiert wird.

9 Leitgeradendefinition einer Ellipse

Ein Kegelschnitt ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einer festen Geraden den ε–fachen Abstand wie von einem festen Punkt haben. Man nennt die feste Gerade die Leitgerade und den festen Punkt Brennpunkt des Kegelschnitts. Ist $0 < \varepsilon < 1$, so erhält man eine Ellipse. Wir legen den festen Punkt F_2 in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und drehen dessen Achsen, so dass die Leitgerade l parallel zur y–Achse im Abstand d liegt. Der Punkt $P = (x, y)$ besitze den Abstand $d(P, l)$ zur Leitgeraden und $r := d(P, F)$ zum Brennpunkt. Nach Voraussetzung gilt also:

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon \cdot d(P,l) = r \quad | \text{ Abstandsbedingung einsetzen} \\
\Rightarrow\ & \varepsilon \cdot (d - x) = r \quad | \ x = r\,\cos(\varphi) \\
\Rightarrow\ & \varepsilon d - \varepsilon\, r\,\cos(\varphi) = r \quad | \text{ nach } r \text{ auflösen} \\
\Rightarrow\ & r = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} \quad | \ \varepsilon d = p \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow\ & r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} \quad | \text{ Polarform der Ellipsengleichung gemäss (32)}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

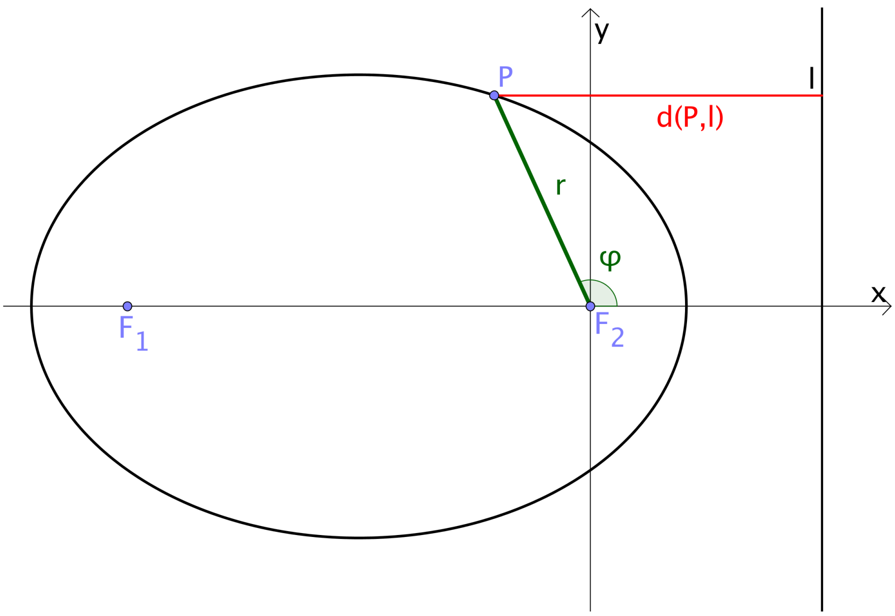


Abbildung 14: Die Ellipse und ihre Leitgerade

10 Polarform der Ellipsengleichung

Gegeben sei eine Ellipse mit grosser Halbachse a und den Brennpunkten F_1, F_2 im Abstand $2c$. P sei ein beliebiger Punkt auf der Ellipse mit $\overline{F_2P} = r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a \quad \mid -r = \overline{F_2P} \\ \Rightarrow \quad & \overline{F_1P} = 2a - r \quad \mid \text{Quadrieren} \\ \Rightarrow \quad & \left(\overline{F_1P}\right)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \end{aligned} \tag{30}$$

Andererseits folgt im Dreieck F_1PF_2 mit Hilfe des Kosinussatzes:

$$\begin{aligned} & \left(\overline{F_1P}\right)^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc\cos(180^\circ - \varphi) \quad \mid \text{Additionstheorem} \\ \Rightarrow \quad & \left(\overline{F_1P}\right)^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc\cos(\varphi) \end{aligned} \tag{31}$$

Gleichsetzen von (30) und (31) liefert:

$$\begin{aligned} & 4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc\cos(\varphi) \quad \mid -r^2, :4 \\ \Rightarrow \quad & a^2 - ar = c^2 + rc\cos(\varphi) \quad \mid +ar - c^2 \\ \Rightarrow \quad & a^2 - c^2 = ar + rc\cos(\varphi) \quad \mid \text{(3), } ar \text{ ausklammern} \\ \Rightarrow \quad & b^2 = ar \cdot \left(1 + \frac{c}{a}\cos(\varphi)\right) \quad \mid :a \\ \Rightarrow \quad & \frac{b^2}{a} = r \cdot \left(1 + \frac{c}{a}\cos(\varphi)\right) \quad \mid \text{(5), (9)} \\ \Rightarrow \quad & p = r \cdot (1 + \varepsilon\cos(\varphi)) \quad \mid : 1 + \varepsilon\cos(\varphi) \\ \Rightarrow \quad & r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} \end{aligned} \tag{32}$$

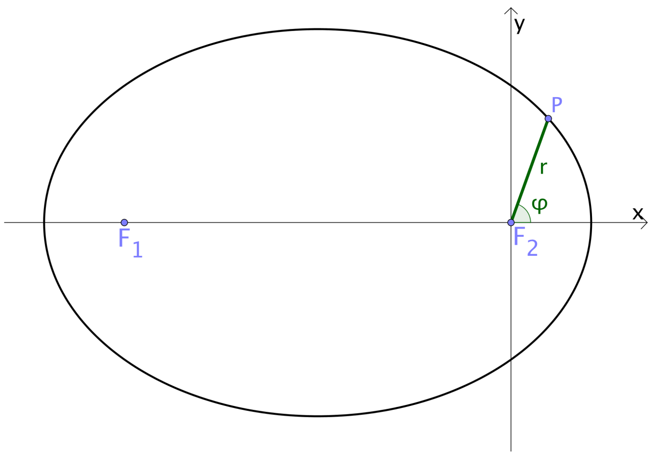


Abbildung 15: Brennpunktabstand r und Bahnwinkel φ einer Ellipse

11 Kartesische Form der Ellipsengleichung

Gegeben sei die Menge aller Punkte $P = (x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ in der Ebene, die die Gleichung (32) erfüllen. Als Brennpunkte bezeichnen wir die Punkte $F_2 = (0, 0)$ und $F_1 = (-2c, 0)$. Dann folgt aus dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned} & \left(\overline{F_1P}\right)^2 = (2c + r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2 \quad | \text{ Binomi} \\ \Rightarrow \quad & \left(\overline{F_1P}\right)^2 = 4c^2 + 4cr\cos(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) \quad | \text{ ausklammern} \\ \Rightarrow \quad & \left(\overline{F_1P}\right)^2 = 4c^2 + 4cr\cos(\varphi) + r^2 \end{aligned} \tag{33}$$

Wäre P ein Punkt auf der Ellipse, so folgt aus der Gärtnerbedingung:

$$\left(\overline{F_1P}\right)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \tag{34}$$

Die Grössen a und c sind durch p und ε bestimmt. Gemäss Gleichung (8) gilt $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$, woraus mit Gleichung (5) $c = \varepsilon a = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$ folgt. Zu zeigen ist demnach:

$$\begin{aligned} & 4c^2 + 4cr\cos(\varphi) + r^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \quad | -r^2, :4 \\ \Leftrightarrow \quad & c^2 + cr\cos(\varphi) = a^2 - ar \quad | :a, \text{ (5)} \\ \Leftrightarrow \quad & \varepsilon c + \varepsilon r\cos(\varphi) = a - r \quad | +r - \varepsilon c \\ \Leftrightarrow \quad & r \cdot (1 + \varepsilon\cos(\varphi)) = a - \varepsilon c \quad | \text{ (5)} \\ \Leftrightarrow \quad & r \cdot (1 + \varepsilon\cos(\varphi)) = a - \varepsilon^2 a \quad | \text{ (8)} \\ \Leftrightarrow \quad & r \cdot (1 + \varepsilon\cos(\varphi)) = p \quad | :(1 + \varepsilon\cos(\varphi)) \\ \Leftrightarrow \quad & r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi)} \end{aligned} \tag{35}$$

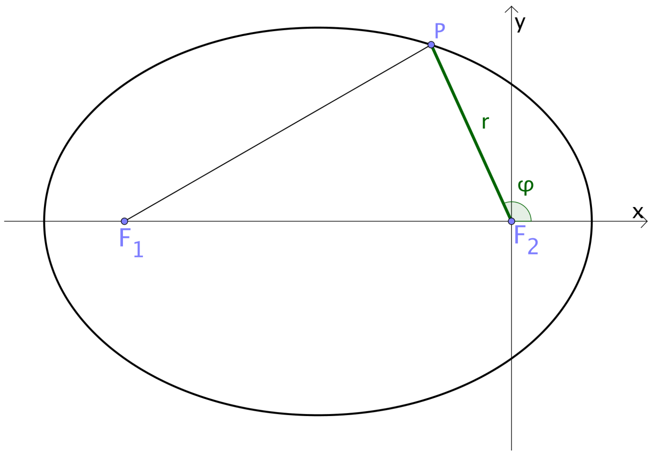


Abbildung 16: Der Punkt $P = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ erfüllt die Gärtnerbedingung

12 Leitkreis einer Ellipse

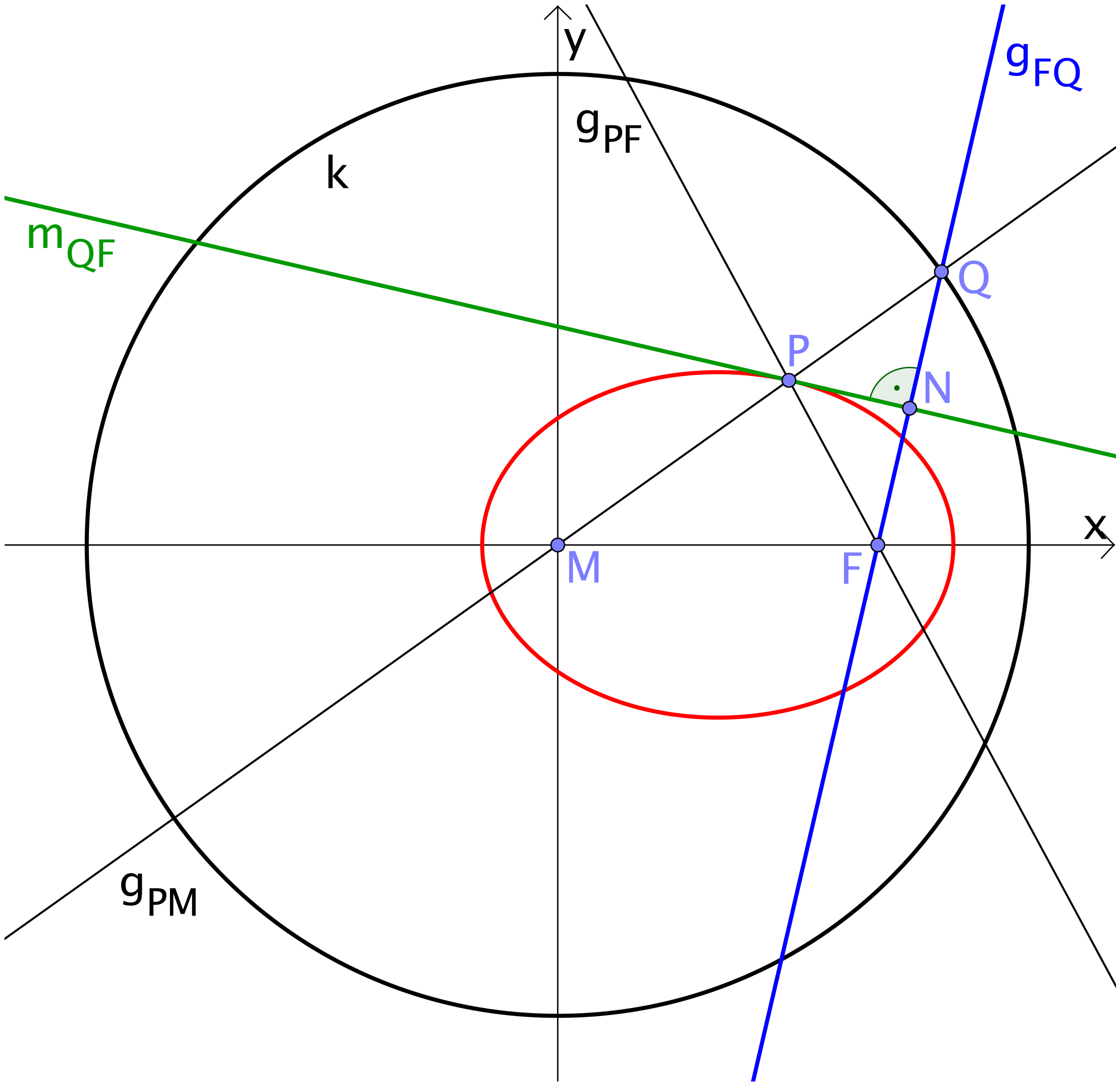


Abbildung 17: Leitkreis der Ellipse

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von einer Kreislinie k (Leitkreis) und einem Punkt F im Inneren von k denselben Abstand besitzen.
Unter dem Abstand des Punktes P zur Kreislinie k versteht man den kürzesten Abstand d.h. das Lot von P auf k. Bezeichnet Q den Fusspunkt des Lotes auf k, so liegt P auf der Geraden g_{PM} durch den Kreismittelpunkt M von k und Q, da jedes Lot durch einen Kreispunkt notwendig auch durch den Kreismittelpunkt verläuft. Alle Punkte,

die von Q und F denselben Abstand haben liegen auf der Mittelsenkrechten m_{QF} der Strecke $\overline{QF}$. Der gesuchte Punkt P ist demnach der Schnittpunkt der Geraden g_{PM} mit m_{QF}.
Wir wollen zuerst die Existenz dieses Schnittpunktes nachweisen. Im Allgemeinen besitzen zwei Geraden in der Ebene entweder genau einen, keinen oder unendlich viele Schnittpunkte. Im letzten und vorletzten Fall sind die beiden Geraden mindestens parallel. Wir führen die Annahme $g_{PM} \parallel m_{QF}$ wie folgt zu einem Widerspruch: Die Gerade g_{FQ} steht senkrecht auf m_{QF} d.h. g_{FQ} steht senkrecht auf g_{PM}. Daher wäre g_{FQ} eine Tangente an den Kreis im Punkt Q. Demnach müsste F entweder ausserhalb des Kreises liegen oder mit Q zusammenfallen, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass F im Kreisinneren liegt.
Die Geraden g_{PM} und m_{QF} sind demnach nicht parallel und besitzen daher genau einen Schnittpunkt.
Nun zeigen wir noch, dass die so konstruierten Schnittpunkte der Geraden g_{PM} und m_{QF} der Gärtnerbedingung genügen. Nach Definition der Mittelsenkrechten gilt zunächst:

$$\begin{aligned} & \overline{FP} + \overline{PM} = \overline{QP} + \overline{PM} \quad \mid M, P, Q \text{ kollinear} \\ \Leftrightarrow\ & \overline{FP} + \overline{PM} = \overline{QM} \quad \mid r := \overline{QM} \text{ unabhängig von } P \\ \Leftrightarrow\ & \overline{FP} + \overline{PM} = r \end{aligned} \tag{36}$$

13 Ellipsenkonstruktion

Von einer Ellipse sei ein Brennpunkt F_2, der Wert der grossen Halbachse a, ein Punkt P und die Tangente in P an die Ellipse gegeben. Dann lässt sich der andere Brenpunkt F_1 wie folgt konstruieren:

- Zeichne die Gerade g durch F_2 und P.
- Trage auf g im Abstand $2a$ von F_2 den Punkt R ab.
- Die Spiegelung von R an der Tangenten ist der gesuchte Brennpunkt F_1.

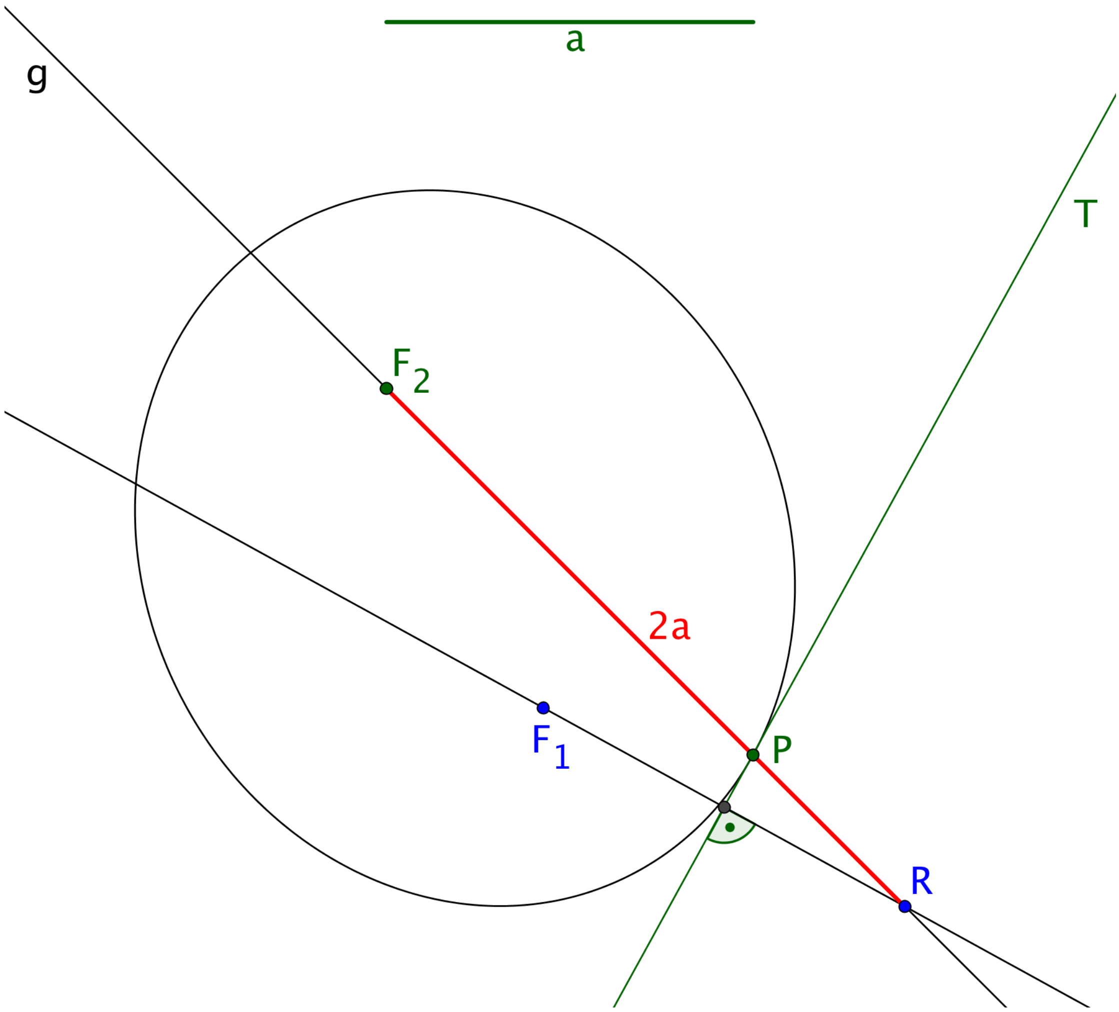


Abbildung 18: Beispiel einer Ellipsenkonstruktion