Die allgemeine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$p = \sqrt{\frac{-\mathrm{DET}}{(\lambda_1)^3}}$$

Version 1.2 vom Dezember 2015

Ausgearbeitet von Martin Gubler, Kantonsschule Frauenfeld, anno 2015

Mit LaTeX in eine lesbare Form gebracht von Alfred Hepp, Bergün, im Winter 2016/2017

1 Strategie und grundlegende Definitionen

Wir untersuchen die Gleichung

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + 2 \cdot D \cdot x + 2 \cdot E \cdot y + F = 0 \tag{1}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$. Es sollen dabei nicht A, B und C gleichzeitig null sein.

Es zeigt sich, dass die folgenden Terme ausreichen, um eine vollständige Fallunterscheidung vorzunehmen:

- $\mathrm{DET} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = A \cdot C \cdot F + 2 \cdot B \cdot D \cdot E - C \cdot D^2 - A \cdot E^2 - F \cdot B^2$
- $\mathrm{det} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2$
- $\mathrm{spur} = A + C$
- A und C selber

Wir werden zeigen, dass die folgende Tabelle eine vollständige Gliederung aller möglichen Fälle darstellt. Die Lösungsmenge von (1) geht immer durch eine Drehung oder eine Drehstreckung und eine Translation aus der bekannten Lösungsmenge einer der Gleichungen in der vierten Spalte hervor. In den ersten drei Spalten stehen die Kriterien, welche ausreichen zu entscheiden, welcher Fall konkret vorliegt.

Kriterien			Gleichung	Nr.	Lösungsmenge
$\det > 0$	$\mathrm{DET} \neq 0$	$\mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur} < 0$	$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$	1	Eine Ellipse oder ein Kreis
		$\mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur} > 0$	$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = -1$	2	Die leere Menge
	$\mathrm{DET} = 0$		$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 0$	3	1 Punkt
$\det = 0$	$\mathrm{DET} \neq 0$		$y' = a \cdot (x')^2,\ a > 0$	4	Eine Parabel
	$\mathrm{DET} = 0$	$A \neq 0$	$(x')^2 + 2 \cdot D \cdot x' + A \cdot F = 0$	5	Die leere Menge, eine Gerade oder 2 parallele Geraden - je nach dem Wert der Diskriminanten
		$C \neq 0$	$(x')^2 + 2 \cdot E \cdot x' + C \cdot F = 0$	6	
$\det < 0$	$\mathrm{DET} \neq 0$		$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$	7	eine Hyperbel
	$\mathrm{DET} = 0$		$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0$	8	2 sich schneidende Geraden

Bei det > 0 sprechen wir vom *elliptischen Fall*, bei det $= 0$ vom *parabolischen Fall* und bei det < 0 vom *hyperbolischen Fall*.

Das Vorgehen ist in allen Fällen dasselbe: Wir nehmen an, dass (1) äquivalent ist zu einer bestimmten Gleichung unserer Liste. Daraus leiten wir eine Reihe von Gleichungen ab, welche die Gestalt der Kurve und die Abbildung von (x/y) auf (x'/y') genau beschreiben. Schliesslich zeigen wir, dass alle diese Gleichungen auch erfüllt werden können, wenn nur die Voraussetzungen in den ersten drei Spalten erfüllt sind.

In allen Fällen sollen sämtliche Details der Lösungskurve von (1) explizit berechnet werden. Dazu werden noch einige weitere Terme definiert:

- $\mathrm{k} = \mathrm{signum}(-\mathrm{DET})$
- $\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(A + C + \mathrm{k} \cdot \sqrt{(A-C)^2 + 4 \cdot B^2}\right)$

  $\lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(A + C - \mathrm{k} \cdot \sqrt{(A-C)^2 + 4 \cdot B^2}\right)$

λ_1 und λ_2 sind die beiden Eigenwerte der symmetrischen Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Aufgrund der Definition gilt $\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ und $\mathrm{spur} = \lambda_1 + \lambda_2$. Die zugehörigen Eigenvektoren werden in dieser Darstellung nicht benötigt.

Zwei weitere Grössen tauchen aber wiederholt auf, die wir aus der Entwicklung von DET nach der letzten Spalte gewinnen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{DET} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} &= D \cdot \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix} - E \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} + F \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \\
&= D \cdot (B \cdot E - C \cdot D) - E \cdot (A \cdot E - B \cdot D) + F \cdot (A \cdot C - B^2) \\
&= D \cdot h_1 \qquad\qquad\quad + E \cdot h_2 \qquad\qquad\quad + F \cdot \det
\end{aligned}$$

mit $h_1 = B \cdot E - C \cdot D$ und $h_2 = B \cdot D - A \cdot E$.

2 Die elliptischen Fälle ①, ② und ③

Die quadratische Gleichung

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + 2 \cdot D \cdot x + 2 \cdot E \cdot y + F = 0 \tag{1}$$

sei also äquivalent zu

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = \kappa \tag{2}$$

mit $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$ und $a^2 \geq b^2 > 0$.

Wir wollen also die Fälle ①, ② und ③ gleichzeitig behandeln.

Es soll also eine Translation und eine Drehung geben, welche (x/y) auf (x'/y') abbilden, sodass (x/y) der Gleichung (1) genau dann genügt, wenn (x'/y') eine Lösung von (2) ist:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cdot x - d \cdot u - e \cdot y + e \cdot v \\ e \cdot x - e \cdot u + d \cdot y - d \cdot v \end{pmatrix}$$

(x/y) soll also genau dann eine Lösung von (1) sein, wenn gilt

$$b^2 \cdot (d \cdot x - d \cdot u - e \cdot y + e \cdot v)^2 + a^2 \cdot (e \cdot x - e \cdot u + d \cdot y - d \cdot v)^2 = \kappa \cdot a^2 \cdot b^2 \tag{3}$$

Multipliziert man (3) aus und vergleicht die Koëffizienten mit (1), so erhält man für einen beliebigen Skalenfaktor $\mu \neq 0$ die Gleichungen

I $\quad \mu \cdot A = a^2 \cdot e^2 + b^2 \cdot d^2$

II $\quad \mu \cdot B = (a^2 - b^2) \cdot d \cdot e$

III $\quad \mu \cdot C = a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot e^2$

IV $\quad \mu \cdot D = b^2 \cdot d \cdot e \cdot v - b^2 \cdot d^2 \cdot u - a^2 \cdot e^2 \cdot u - a^2 \cdot d \cdot e \cdot v$

V $\quad \mu \cdot E = b^2 \cdot d \cdot e \cdot u - b^2 \cdot e^2 \cdot v - a^2 \cdot d \cdot e \cdot u - a^2 \cdot d^2 \cdot v$

VI $\quad \mu \cdot F = b^2 \cdot d^2 \cdot u^2 - 2 \cdot b^2 \cdot d \cdot e \cdot u \cdot v + b^2 \cdot e^2 \cdot v^2 + a^2 \cdot e^2 \cdot u^2 + 2 \cdot a^2 \cdot d \cdot e \cdot u \cdot v + a^2 \cdot d^2 \cdot v^2 - \kappa \cdot a^2 \cdot b^2$

nebst

VII $\quad e^2 + d^2 = 1$

Mithilfe dieser sieben Gleichungen werden wir a, b, d, e, u, v und μ durch die Koëffizienten der Gleichung (1) ausdrücken.

I, III und VII liefern

$$\mu \cdot A + \mu \cdot C = a^2 \cdot (e^2 + d^2) + b^2 \cdot (e^2 + d^2) = a^2 + b^2$$

$$\mu \cdot \text{spur} = a^2 + b^2 \qquad ; \qquad \text{spur} = \frac{1}{\mu} \cdot a^2 + \frac{1}{\mu} \cdot b^2 \tag{4}$$

I, II, III und VII liefern

$$\begin{aligned}
\mu^2 \cdot \det &= \mu \cdot A \cdot \mu \cdot C - (\mu \cdot B)^2 \\
&= (a^2 \cdot e^2 + b^2 \cdot d^2) \cdot (a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot e^2) - (a^2 - b^2)^2 \cdot d^2 \cdot e^2 \\
&= \cancel{a^4 \cdot e^2 \cdot d^2} + a^2 \cdot b^2 \cdot e^4 + a^2 \cdot b^2 \cdot d^4 + \cancel{b^4 \cdot e^2 \cdot d^2} - \\
&\quad (\cancel{a^4 \cdot d^2 \cdot e^2} - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot d^2 \cdot e^2 + \cancel{b^4 \cdot d^2 \cdot e^2}) \\
&= a^2 \cdot b^2 \cdot (e^4 + d^4 + 2 \cdot d^2 \cdot e^2) \\
&= a^2 \cdot b^2 \cdot (e^2 + d^2)^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot (1)^2 = a^2 \cdot b^2
\end{aligned}$$

$$\det = \frac{1}{\mu} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{\mu} \cdot b^2 \tag{5}$$

(4) und (5) bedeuten zusammen, dass gilt

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu} \cdot a^2 \text{ und } \lambda_2 = \frac{1}{\mu} \cdot b^2 \tag{6}$$

Beide Eigenvektoren sind verschieden von null, da $\mu \neq 0$ und $a^2 \geq b^2 > 0$. λ_1 und λ_2 haben dasselbe Vorzeichen, es gilt daher

$$\text{spur} = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0 \quad \text{und} \quad \det = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \tag{7}$$

Dieses „$\det > 0$“ ist charakteristisch für den elliptischen Fall.

Es ist $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| > 0$. Wir werden später sehen, dass das zu unserer expliziten Definition der beiden Eigenwerte passt.

Im Spezialfall des Kreises gilt $a^2 = b^2$. Mit I, II und III sieht man schnell, dass dies gleichbedeutend ist mit

$$B = 0 \text{ und } A = C$$

Die Rotation ist dann überflüssig, man kann $d = 1$ und $e = 0$ setzen.

Ganz elementar, also ohne partielle Ableitungen, lassen sich aus unseren Gleichungen die Parameter u und v der Translation bestimmen. Wir benützen I, II und III um die Gleichungen IV und V neu zu schreiben:

IV $\quad \mu \cdot D = (-a^2 \cdot e^2 - b^2 \cdot d^2) \cdot u + (b^2 - a^2) \cdot d \cdot e \cdot v = -\mu \cdot A \cdot u - \mu \cdot B \cdot v$

V $\quad \mu \cdot E = (-b^2 \cdot e^2 - a^2 \cdot d^2) \cdot v + (b^2 - a^2) \cdot d \cdot e \cdot u = -\mu \cdot B \cdot u - \mu \cdot C \cdot v$

Nach Division durch $-\mu$ erhalten wir

$$\begin{array}{r|} A \cdot u + B \cdot v = -D \\ B \cdot u + C \cdot v = -E \\ \hline \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix}$$

Nach (7) gilt $\det \neq 0$, es existiert also die inverse Matrix. Multipliziert man mit dieser von links, erhält man

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{A \cdot C - B^2} \cdot \begin{pmatrix} C & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \cdot \begin{pmatrix} B \cdot E - C \cdot D \\ B \cdot D - A \cdot E \end{pmatrix}$$

Mit den Abkürzungen $h_1 = B \cdot E - C \cdot D$ und $h_2 = B \cdot D - A \cdot E$ gilt also

$$M = (u/v) = \left(\frac{h_1}{\det} \Big/ \frac{h_2}{\det} \right) \tag{8}$$

Ist $\kappa = 1$, so stellt M den Mittelpunkt der Ellipse dar.
Ist $\kappa = 0$, so ist M die einzige Lösung von (1), da $(0/0)$ dann die einzige Lösung von(2) ist.
Und wenn $\kappa = -1$ gilt, hat (2) keine Lösungen, weshalb dann auch (1) keine Lösungen hat.

Nun betrachten wir die Gleichung VI:

$$\begin{aligned} \mu \cdot F &= (b^2 \cdot d^2 + a^2 \cdot e^2) \cdot u^2 + (b^2 \cdot e^2 + a^2 \cdot d^2) \cdot v^2 \\ &\qquad + 2 \cdot (a^2 - b^2) \cdot d \cdot e \cdot u \cdot v - \kappa \cdot a^2 \cdot b^2 \\ &= \mu \cdot A \cdot u^2 + \mu \cdot C \cdot v^2 + \mu \cdot 2 \cdot B \cdot u \cdot v - \kappa \cdot a^2 \cdot b^2 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{1}{\mu} \cdot \kappa \cdot a^2 \cdot b^2 = A \cdot u^2 + C \cdot v^2 + 2 \cdot B \cdot u \cdot v - F$$

Setzt man die Werte ein, die wir in (8) für u und v gefunden haben, dann erhält man nach längerer Rechnung

$$\kappa \cdot a^2 \cdot b^2 = \mu \cdot \frac{-\mathrm{DET}}{\det} \tag{9}$$

Diese Gleichung zeigt, dass κ genau dann null ist, wenn auch DET null ist. Damit sind die Kriterien für die Zuordnung zum Fall 3 bewiesen.

Mit (9) können wir die Gleichung (3) neu schreiben:

$$b^2 \cdot (x')^2 + a^2 \cdot (y')^2 = \kappa \cdot a^2 \cdot b^2 = \mu \cdot \frac{-\mathrm{DET}}{\det} \tag{10}$$

Mit (6) erhalten wir daraus

$$\mu \cdot \lambda_2 \cdot (x')^2 + \mu \cdot \lambda_1 \cdot (y')^2 = \mu \cdot \frac{-\mathrm{DET}}{\det}$$

und nach Division durch μ

$$\lambda_2 \cdot (x')^2 + \lambda_1 \cdot (y')^2 = \frac{-\mathrm{DET}}{\det} \tag{11}$$

Ist DET $= 0$, so ist die einzige Lösung von (11) der Punkt $(x'/y') = (0/0)$; einzige Lösung von (1) ist damit der Punkt $M = (u/v)$. Es ist ja

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{12}$$

Hat DET dasselbe Vorzeichen wie λ_1, λ_2 und die Spur, so hat (11) keine Lösungen. Dann ist $\mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur} > 0$ und wir sind im Fall 2. Die Kriterien für diesen Fall sind somit auch bewiesen.

(11) und (1) stellen also nur im Falle von $\mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur} < 0$ eine Ellipse dar. Wir wollen noch die Kennzahlen dieser Ellipse bestimmen:

Multipliziert man (11) mit $\dfrac{-\det}{\mathrm{DET}}$ und vergleicht mit der Normalform der Ellipsengleichung

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

so erhält man

$$a^2 = \frac{-\mathrm{DET}}{\det \cdot \lambda_2} = \frac{-\mathrm{DET}}{\lambda_1 \cdot (\lambda_2)^2} \tag{13.1}$$

$$b^2 = \frac{-\mathrm{DET}}{\det \cdot \lambda_1} = \frac{-\mathrm{DET}}{(\lambda_1)^2 \cdot \lambda_2} \tag{13.2}$$

Daraus erhalten wir weiter

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{-\mathrm{DET}}{\det} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{-\mathrm{DET} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}{\det^2} \tag{14}$$

Für die Exzentrizität ϵ ergibt sich daraus

$$\epsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \lambda_2}{\det} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \cancel{\lambda_2}}{\lambda_1 \cdot \cancel{\lambda_2}}$$

somit

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \tag{15}$$

Für das Quermass p resultiert

$$p^2 = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 = \frac{b^4}{a^2} = \frac{-\mathrm{DET} \cdot \lambda_2}{\det \cdot (\lambda_1)^2} = \frac{-\mathrm{DET}}{(\lambda_1)^3}$$

oder

$$p = \sqrt{\frac{-\mathrm{DET}}{(\lambda_1)^3}} \tag{16}$$

Es wird sich herausstellen, dass die Formeln (15) und (16) auch für Parabeln und Hyperbeln gelten. Diese Formeln sind neu, bis jetzt habe ich sie jedenfalls in der Literatur oder den bekannten Formelsammlungen nicht angetroffen. Man kann sie auch nur dann finden, wenn man explizit festlegt, welches der Eigenwert λ_1 und welches der Eigenwert λ_2 sein soll!

Im interessanten Fall von DET $\neq 0$ können wir jetzt auch den Skalenfaktor μ berechnen:

Aus (6) folgt

$$\mu = \frac{a^2}{\lambda_1} = \frac{-\mathrm{DET}}{\det \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1} = \frac{-\mathrm{DET}}{\det^2} \tag{17}$$

Damit sind κ, a^2, b^2, u, v und μ so bestimmt, dass I bis VII erfüllt sind und die Lösungsmenge von (2) mit der Abbildung (12) auf die Lösungsmenge von (1) abgebildet wird. Es fehlen nur noch die Werte von d und e in der Matrix der Rotation.

Diese Werte sind aber schon durch die Gleichungen I, II und VII bestimmt. Allerdings muss dabei der Spezialfall $B = 0$ gesondert behandelt werden. Machen wir das zuerst:

Es sei also $B = 0$. Wegen $\det = A \cdot C - B^2 = A \cdot C > 0$ folgt dann $A \neq 0$ und $C \neq 0$. Wir können daher (1) neu schreiben als

$$A \cdot \left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C \cdot \left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C}$$

oder

$$A \cdot (x')^2 + C \cdot (y')^2 = \frac{-F \cdot A \cdot C + D^2 \cdot C + E^2 \cdot A}{A \cdot C} \stackrel{!}{=} \frac{-\mathrm{DET}}{\det} \tag{18}$$

Das ist schon eine Ellipsengleichung, falls DET $\cdot$ spur < 0. (18) ist äquivalent zu

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

mit $a^2 = \dfrac{-\mathrm{DET}}{\det \cdot A}$ und $b^2 = \dfrac{-\mathrm{DET}}{\det \cdot C}$

Falls $a^2 \geq b^2$ gilt, also falls $|A| \leq |C|$, braucht es keine Drehung, wir setzen dann $d = 1$ und $e = 0$. Andernfalls braucht es noch eine Drehung um 90° (egal in welcher Richtung), wir setzen dann $d = 0$ und $e = 1$. Zusammengefasst:

$$(\, B = 0 \text{ und } |A| \leq |C| \,) \implies (\, d = 1 \text{ und } e = 0 \,) \tag{19.1}$$

$$(\, B = 0 \text{ und } |A| > |C| \,) \implies (\, d = 0 \text{ und } e = 1 \,) \tag{19.2}$$

Es gilt nun noch den allgemeinen Fall mit $B \neq 0$ abzuhandeln.

Ist $B \neq 0$ dann gilt auch

- $d \neq 0$ und $e \neq 0$ und $a^2 \neq b^2$ wegen II
- $A \neq 0$ und $C \neq 0$ wegen $A \cdot C - B^2 > 0$
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ aufgrund der Definition

Wir wählen dann $d = \cos(\varphi) > 0$, da wir eine Ellipse aus Symmetriegründen immer nur um einen spitzen Winkel drehen müssen, um sie in Hauptachsenlage zu bringen. Die Drehung um 90° haben wir im Fall $B = 0$ schon erledigt.

Es genügt also, d^2 zu berechnen, wofür wir nur I und VII brauchen:

$$\mu \cdot A = a^2 \cdot (1 - d^2) + b^2 \cdot d^2 = a^2 + (b^2 - a^2) \cdot d^2$$

Daraus mit (6)

$$d^2 = \frac{\mu \cdot A - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{\mu \cdot A - \mu \cdot \lambda_1}{\mu \cdot \lambda_2 - \mu \cdot \lambda_1} = \frac{A - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$d = \sqrt{\frac{\lambda_1 - A}{\lambda_1 - \lambda_2}} \tag{20.1}$$

Die Gleichung II liefert uns dazu noch den Wert von e mit dem richtigen Vorzeichen:

$$e = \frac{\mu \cdot B}{(a^2 - b^2) \cdot d} = \frac{\mu \cdot B}{\mu \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot d} = \frac{B}{d \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \tag{20.2}$$

Damit ist jetzt folgendes bewiesen:

i) Gilt (1) $\iff$ ①, dann beschreibt (1) eine Ellipse mit Mittelpunkt $M = (u/v)$ und den Halbachsen a und b. Die Richtung der Achsen wird durch die Parameter d und e der Rotation beschrieben.
In diesem Fall gilt $\det > 0$, $\mathrm{DET} \neq 0$ und $\mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur} < 0$.

ii) Gilt (1) $\iff$ ②, dann ist die Lösungsmenge von (1) leer.
Es gilt dann $\det > 0$, $\mathrm{DET} \neq 0$ und $\mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur} > 0$.

iii) Gilt (1) $\iff$ ③, dann besteht die Lösungsmenge aus dem einzigen Punkt $M = (u/v)$.
Dann gilt $\det > 0$ und $\mathrm{DET} = 0$.

Nun müssen wir noch die Umkehrung zeigen:

i') $\big(\det > 0 \text{ und } \mathrm{DET} \neq 0 \text{ und } \mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur} < 0\big) \Longrightarrow \big((1) \iff ①\big)$

ii') $\big(\det > 0 \text{ und } \mathrm{DET} \neq 0 \text{ und } \mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur} > 0\big) \Longrightarrow \big((1) \iff ②\big)$

iii') $\big(\det > 0 \text{ und } \mathrm{DET} = 0\big) \Longrightarrow \big((1) \iff ③\big)$

Der Beweis ist in allen drei Fällen konstruktiv. Wir zeigen, wie man im jeweiligen Fall a, b, d, e, μ, λ_1, λ_2, u und v bestimmt, sodass I bis VII erfüllt sind und somit die Lösungsmenge von ①, ② oder ③ durch die Abbildung (12) auf die Lösungsmenge von (1) abgebildet wird.

In den Fällen ① und ②, also wenn gilt $\det > 0$ und $\mathrm{DET} \neq 0$, gehe man wie folgt vor:

1. Bestimme λ_1 und λ_2 nach unseren Definitionen

2. Bestimme μ nach (17)

3. Bestimme u und v nach (8)

4. Bestimme a^2 und b^2 mit (13)

5. Bestimme d und e nach (19) oder (20)

6. Zeige dass mit diesen Werten I bis VII erfüllt sind!

Die Beweise zu **6.** lassen sich mühelos durchführen, sie würden aber zwei bis drei weitere Seiten beanspruchen und werden hier weggelassen. Es folgt nun die Äquivalenz von (1) zu ① resp. ②, je nach dem Vorzeichen von $\mathrm{DET} \cdot \mathrm{spur}$.

Im Fall ③, also wenn gilt $\det > 0$ und $\text{DET} = 0$, muss man leicht anders vorgehen:

1. Bestimme λ_1 und λ_2 nach unseren Definitionen

2. Bestimme u und v nach (8)

3. Bestimme d und e nach (19) oder (20)

4. Setze $\mu = \lambda_1$, $a^2 = \mu \cdot \lambda_1 = (\lambda_1)^2$ und $b^2 = \mu \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

5. Zeige dass mit diesen Werten I bis VII erfüllt sind!

Mit (10) folgt dann die Äquivalenz von (1) und ③. Die Beweise zu **5.** sind auch hier harmlos.

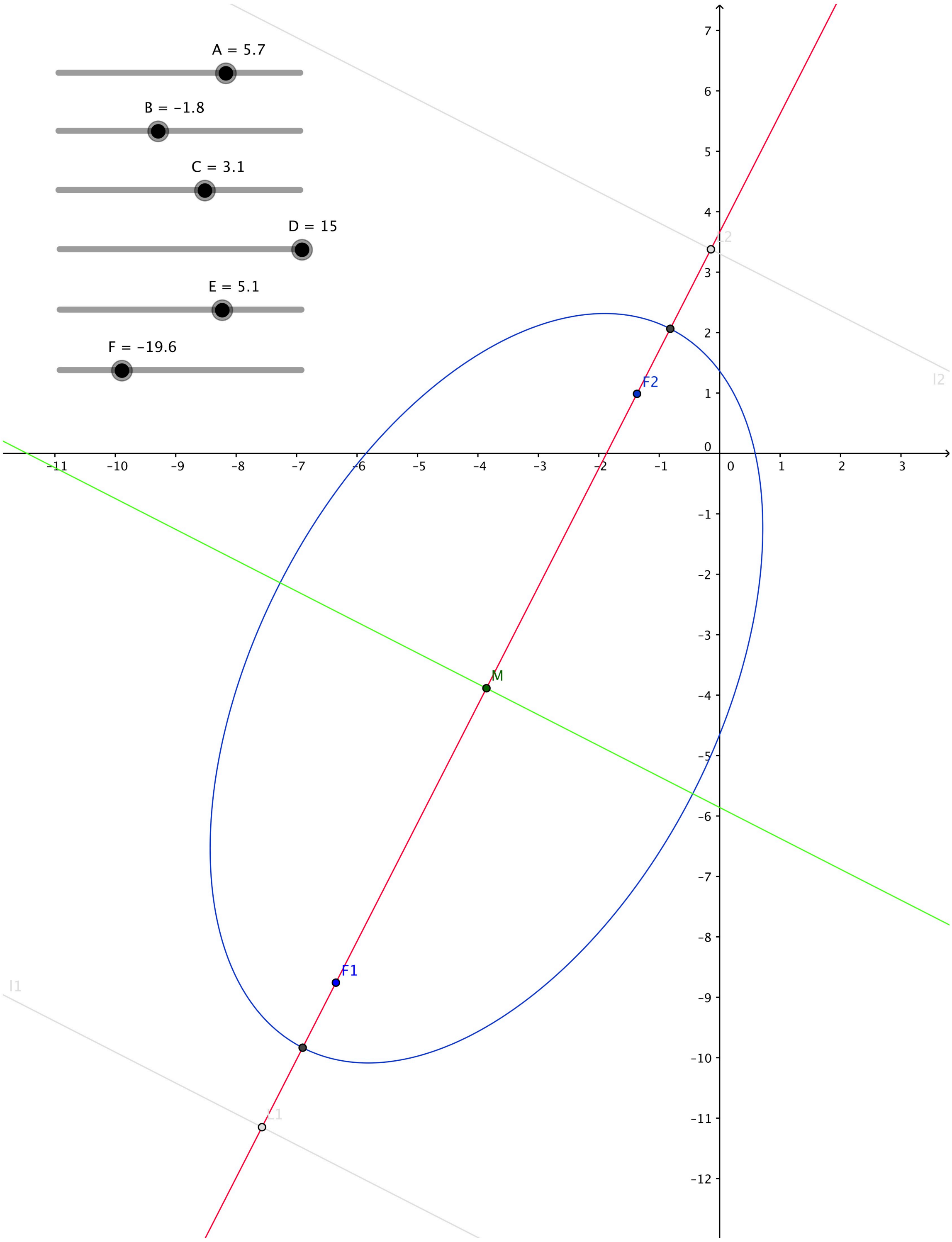
Sie können leicht selber prüfen, ob all die hergeleiteten Formeln stimmen: Laden Sie die GeoGebra-Datei „ellipt_hyperbol.ggb“ von meiner Webseite „www.physastromath.ch/mathematik/geogebra“ herunter. Sie können dann mit Schiebereglern die Parameter A bis F der quadratischen Gleichung (1) einstellen. Der zugehörige Kegelschnitt wird gezeichnet, zusammen mit den Brennpunkten, den Hauptachsen, den Scheitelpunkten, den Leitlinien usw. Diese Stücke werden mit den Formeln in diesem Kapitel berechnet, wie Sie im Algebra-Teil der GeoGebra-Datei sehen können.

Die Variablennamen sind wie in den Abschnitten 2 bis 7 des Skriptums „Conics_01“ gewählt. Sie sind identisch mit den Namen, die wir in diesem Skriptum verwendet haben. In wenigen Fällen gibt es Abweichungen dazu:

p	der erste Eigenwert λ_1
q	der zweite Eigenwert λ_2
quer1	das Quermass p des Kegelschnitts
quer2	das Quermass p des Kegelschnitts
eps1	die numerische Exzentrizität ε
eps2	die numerische Exzentrizität ε

Einige Werte wie zum Beispiel die Exzentrizität und die spur werden zur Kontrolle auf verschiedene Arten berechnet. Wenn Sie den Bereich oder die Feinheit der Schritte bei den Schiebereglern A bis F ändern wollen, brauchen Sie nur mit der rechten Maustaste darauf zu klicken. Es klappt ein Kontext-Menu auf; wählen Sie dort den untersten Eintrag „Eigenschaften“ und Sie können alle Vorgaben abändern.

Die folgende Seite zeigt ein elliptisches Beispiel:


A = 5.7
B = −1.8
C = 3.1
D = 15
E = 5.1
F = −19.6
F2
M
F1

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch eine hübsche (aber bereits bekannte) Formel für den Drehwinkel der Rotation herleiten.

Nach (12), (19) und (20) gilt für den Winkel φ der Rücktransformation

$$\cos(\varphi) = d,\ \sin(\varphi) = -e,\ \tan(\varphi) = \frac{-e}{d}$$

Die Goniometrie lehrt uns, dass für den Tangens des doppelten Winkels gilt

$$\tan(2\cdot\varphi) = \frac{2\cdot\tan(\varphi)}{1-\tan^2(\varphi)} = \frac{-2\cdot\frac{e}{d}}{1-\frac{e^2}{d^2}} = \frac{2\cdot d\cdot e}{e^2-d^2} \tag{21}$$

Aus der Gleichung II holen wir

$$2\cdot d\cdot e = \frac{2\cdot\mu\cdot B}{a^2-b^2} = \frac{\mu}{a^2-b^2}\cdot 2\cdot B \tag{22}$$

Subtrahieren wir III von I, erhalten wir

$$\mu\cdot A-\mu\cdot C = (a^2-b^2)\cdot(e^2-d^2)$$

also

$$(e^2-d^2) = \frac{\mu\cdot(A-C)}{a^2-b^2} = \frac{\mu}{a^2-b^2}\cdot(A-C) \tag{23}$$

Setzen wir (22) und (23) in (21) ein, ergibt sich

$$\boxed{\tan(2\cdot\varphi) = \frac{2\cdot B}{A-C}} \tag{24}$$

Die Formel gilt auch für $B = 0$, dann ist $\varphi = 0°$ oder $\varphi = 90°$ nach (19), somit $2\cdot\varphi = 0°$ oder $2\cdot\varphi = 180°$. Für $A = C$ muss die Formel versagen, dann ist ja nach (23) $e^2 = d^2$. Für $B \neq 0$ bedeutet das einen Winkel φ von $\pm 45°$, somit ist $2\cdot\varphi = \pm 90°$ und der Tangenswert davon existiert nicht.

3 Der parabolische Fall ④

Die quadratische Gleichung

$$A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + 2 \cdot D \cdot x + 2 \cdot E \cdot y + F = 0 \tag{1}$$

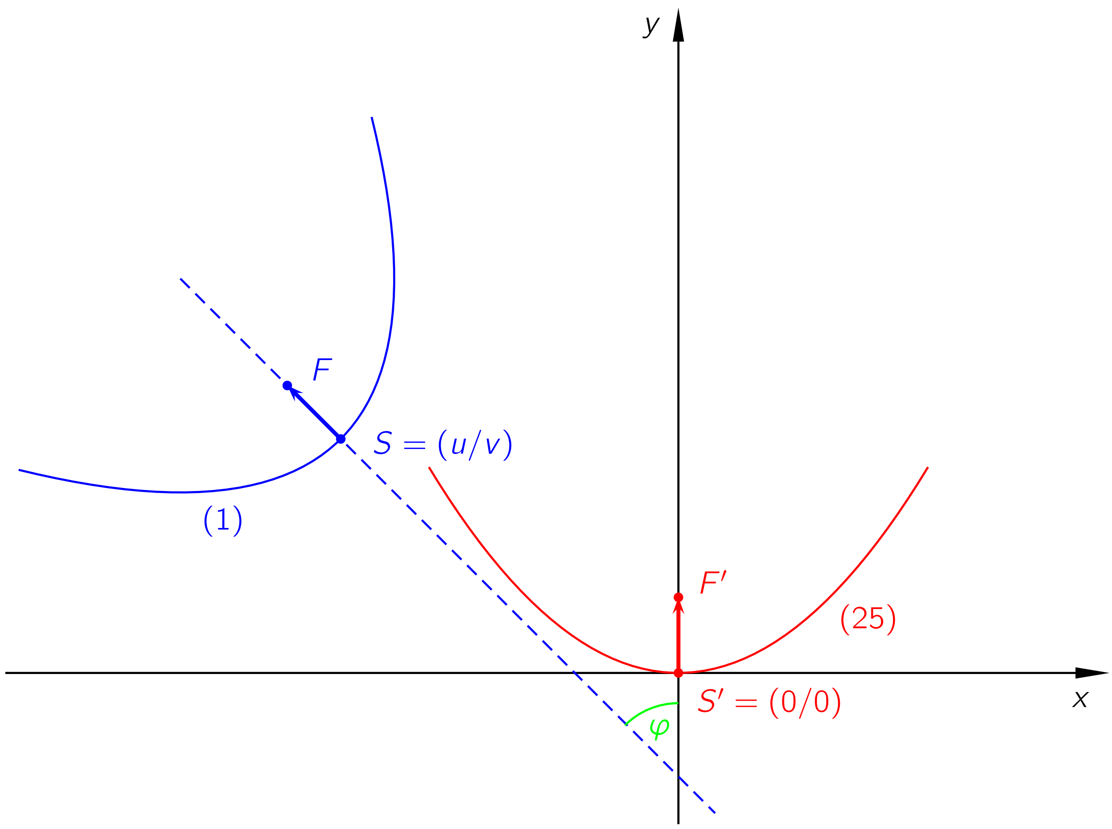
sei nun äquivalent zu

$$y' = a \cdot (x')^2, \quad a > 0 \tag{25}$$

Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix} \tag{26}$$

soll die Lösungsmenge von (1) auf diejenige von (25) abbilden. Dabei ist $S = (u/v)$ der Scheitelpunkt der Lösungsparabel von (1):



Nach (26) gilt

$$x' = d \cdot x - e \cdot y - d \cdot u + e \cdot v \quad \text{und} \quad y' = e \cdot x + d \cdot y - e \cdot u - d \cdot v$$

Eingesetzt in (25) erhalten wir

$a \cdot (d^2 \cdot u^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot u \cdot v - 2 \cdot d^2 \cdot u \cdot x + 2 \cdot d \cdot e \cdot u \cdot y + e^2 \cdot v^2 + 2 \cdot d \cdot e \cdot v \cdot x - 2 \cdot e^2 \cdot v \cdot y + d^2 \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot x \cdot y + e^2 \cdot y^2) = e \cdot x + d \cdot y - e \cdot u - d \cdot v$

Der Koëffizientenvergleich mit (1) liefert die Gleichungen

I $\quad \mu \cdot A = a \cdot d^2$

II $\quad \mu \cdot B = -a \cdot d \cdot e$

III $\quad \mu \cdot C = -a \cdot e^2$

IV $\quad \mu \cdot D = -a \cdot d^2 \cdot u + a \cdot d \cdot e \cdot v - \frac{1}{2} \cdot e$

V $\quad \mu \cdot E = a \cdot d \cdot e \cdot u - a \cdot e^2 \cdot v - \frac{1}{2} \cdot d$

VI $\quad \mu \cdot F = a \cdot d^2 \cdot u^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot e \cdot u \cdot v + a \cdot e^2 \cdot v^2 + e \cdot u + d \cdot v$

VII $\quad e^2 + d^2 = 1$

Aus diesen Gleichungen ziehen wir nun eine Reihe von Folgerungen:

a) $\mu^2 \cdot \det = \mu^2 \cdot (A \cdot C - B^2) = \mu \cdot A \cdot \mu \cdot C - (\mu \cdot B)^2 =$
$a \cdot d^2 \cdot a \cdot e^2 - (-a \cdot d \cdot e)^2 = a^2 \cdot d^2 \cdot e^2 - a^2 \cdot d^2 \cdot e^2 = 0$

Die Gleichungen I - III verlangen also, dass bei Parabeln zwingend gilt

$$\det = A \cdot C - B^2 = 0 \tag{27}$$

b) Wegen $\det = 0$ folgt $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$. Da nicht beide Eigenwerte null sein können, ist genau einer der beiden von null verschieden. Dieser Eigenwert ist dann gleich der Spur $A + C$, es gilt also

$$\text{spur} = A + C = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0 \tag{28}$$

c) Dass die Spur nicht null sein kann, zeigt auch die folgende Rechnung:

$\mu \cdot (A + C) = \mu \cdot A + \mu \cdot C = a \cdot d^2 + a \cdot e^2 = a \cdot (d^2 + e^2) = a > 0$

Also

$$\mu \cdot (A + C) = a \tag{29}$$

d) Aus (25) und I bis III holen wir noch

$$d \cdot e = \frac{-\mu \cdot B}{a} = \frac{-\mu \cdot B}{\mu \cdot (A + C)} = \frac{-B}{A + C} \tag{30.1}$$

$$d^2 = \frac{\mu \cdot A}{a} = \frac{\mu \cdot A}{\mu \cdot (A + C)} = \frac{A}{A + C} \tag{30.2}$$

$$e^2 = \frac{\mu \cdot C}{a} = \frac{\mu \cdot C}{\mu \cdot (A + C)} = \frac{C}{A + C} \tag{30.3}$$

e) II, III und IV liefern zusammen mit VII

$$\begin{aligned}
&\mu^2 \cdot (B \cdot E - C \cdot D) = \mu \cdot B \cdot \mu \cdot E - \mu \cdot C \cdot \mu \cdot D \\
&= -a \cdot d \cdot e \cdot \left[a \cdot d \cdot e \cdot u - a \cdot e^2 \cdot v - \frac{1}{2} \cdot d \right] - a \cdot e^2 \cdot \left[-a \cdot d^2 \cdot u + a \cdot d \cdot e \cdot v - \frac{1}{2} \cdot e \right] \\
&= -\cancel{a^2 \cdot d^2 \cdot e^2} \cdot u + \cancel{a^2 \cdot d \cdot e^3 \cdot v} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot d^2 \cdot e + \cancel{a^2 \cdot d^2 \cdot e^2} \cdot u - \cancel{a^2 \cdot d \cdot e^3 \cdot v} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot e^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot a \cdot e \cdot (d^2 + e^2) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot e
\end{aligned}$$

$$a \cdot e = 2 \cdot \mu^2 \cdot (B \cdot E - C \cdot D) = 2 \cdot \mu^2 \cdot h_1 \tag{31}$$

f) Genau so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mu^2 \cdot (B \cdot D - A \cdot E) = \mu \cdot B \cdot \mu \cdot D - \mu \cdot A \cdot \mu \cdot E \\
&= -a \cdot d \cdot e \cdot \left[-a \cdot d^2 \cdot u + a \cdot d \cdot e \cdot v - \frac{1}{2} \cdot e \right] - a \cdot d^2 \cdot \left[a \cdot d \cdot e \cdot u - a \cdot e^2 \cdot v - \frac{1}{2} \cdot d \right] \\
&= \cancel{a^2 \cdot d^3} \cdot e \cdot u - \cancel{a^2 \cdot d^2 \cdot e^2 \cdot v} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot e^2 - \cancel{a^2 \cdot d^3} \cdot e \cdot u + \cancel{a^2 \cdot d^2 \cdot e^2 \cdot v} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot d^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot (e^2 + d^2) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d
\end{aligned}$$

Somit

$$a \cdot d = 2 \cdot \mu^2 \cdot (B \cdot D - A \cdot E) = 2 \cdot \mu^2 \cdot h_2 \tag{32}$$

Damit können wir die Parameter d und e der Rotationsmatrix bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{33}$$

Die Abbildung (33) bildet den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der in die Richtung von $\overrightarrow{S'F'}$ zeigt, ab auf den Vektor

$$\begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir diesen Vektor mit der positiven Zahl a, erhalten wir mit (31) und (32)

$$a \cdot \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e \\ a \cdot d \end{pmatrix} = 2 \cdot \mu^2 \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix}$ ist also der Einheitsvektor, der in die Richtung von $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ zeigt.

Somit gilt

$$e = \frac{h_1}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}} \tag{34.1}$$

$$d = \frac{h_2}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}} \tag{34.2}$$

h_1 und h_2 können also nicht beide null sein, da ja $a > 0$ vorausgesetzt ist im Fall 4.

Sei also z. B. $h_1 \neq 0$. Dann folgt aus (31)

$$\mu^2 = \frac{a \cdot e}{2 \cdot h_1}$$

Aus (29) und (28) holen wir

$$\mu^2 = \frac{a^2}{(A + C)^2}$$

Somit gilt

$$\frac{\cancel{a} \cdot e}{2 \cdot h_1} = \frac{a^{\cancel{2}}}{(A + C)^2}$$

und mit (34.1) erhalten wir

$$a = \frac{(A + C)^2}{2 \cdot \sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}} \tag{35}$$

Ist $h_1 = 0$, dann haben wir $h_2 \neq 0$. (32) und (34.2) führen dann mit der analogen Rechnung zum gleichen Resultat.

Nun können wir auch den Wert von μ berechnen:

Nach (28) und (29) gilt $\mu = \dfrac{a}{A+C}$. Mit (35) erhalten wir dann sofort

$$\mu = \frac{A+C}{2 \cdot \sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}} \tag{36}$$

Aus (35) erhalten wir für das Quermass p der Parabel

$$p = \frac{1}{2 \cdot a} = \frac{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}{(A+C)^2} \tag{37}$$

Aus einer anderen Herleitung der Resultate wissen wir aber, dass auch gilt

$$p^2 = \frac{-\text{DET}}{(A+C)^3} \tag{38}$$

(37) und (38) sind nur äquivalent, wenn gilt

$$-\text{DET} \cdot (A+C) = (h_1)^2 + (h_2)^2 \tag{39}$$

Diese Identität lässt sich durch simples Nachrechnen prüfen, wenn man für DET einsetzt $D \cdot h_1 + E \cdot h_2$. Es ist ja gemäss Definition von h_1 und h_2 auf der Seite 4 $\text{DET} = D \cdot h_1 + E \cdot h_2 + F \cdot \text{det}$.

Nach (27) ist einer der beiden Eigenwerte 0. Nach (39) haben k = signum(−DET) und die Spur $A+C$ dasselbe Vorzeichen. Daraus folgt mit den Definitionen auf der Seite 4

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{und} \quad \text{spur} = A + C = \lambda_1 \neq 0$$

Wir können damit (38) auch anders schreiben:

$$p = \sqrt{\frac{-\text{DET}}{(\lambda_1)^3}} \tag{40}$$

Diese Formel haben wir mit (16) schon für die Ellipse gefunden, und sie wird genauso auch für das Quermass der Hyperbel gelten.

Nun fehlen uns noch die Koordinaten u und v des Scheitelpunktes S der Parabel. Bei diesen Rechnungen benötigen wir noch zwei kleine weitere Gleichungen:

$$\frac{e}{2 \cdot \mu} = \frac{h_1 \cdot 2 \cdot \sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2} \cdot 2 \cdot (A+C)} = \frac{h_1}{A+C} \tag{41.1}$$

$$\frac{d}{2 \cdot \mu} = \frac{h_2 \cdot 2 \cdot \sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2} \cdot 2 \cdot (A+C)} = \frac{h_2}{A+C} \tag{41.2}$$

I, II und IV $\implies$ $\mu \cdot D = -\mu \cdot A \cdot u - \mu \cdot B \cdot v - \mu \cdot \dfrac{e}{2 \cdot \mu}$

II, III und V $\implies$ $\mu \cdot E = -\mu \cdot B \cdot u - \mu \cdot C \cdot v - \mu \cdot \dfrac{d}{2 \cdot \mu}$

Mit (36) und (41) erhalten wir nach Division durch μ

$$\text{i)} \quad A \cdot u + B \cdot v = -D - \frac{h_1}{A+C} = -D - G \tag{42.1}$$

$$\text{ii)} \quad B \cdot u + C \cdot v = -D - \frac{h_2}{A+C} = -E - H \tag{42.2}$$

mit den Abkürzungen

$$G = \frac{h_1}{A+C} \quad \text{und} \quad H = \frac{h_2}{A+C}$$

Die beiden Geraden i) und ii) sind identisch: Wegen det $= 0$ sind sie sicher parallel, und da eine Lösung $S = (u/v)$ existiert, sind sie sogar identisch.

Wir brauchen auf jeden Fall noch die Gleichung VI um die Werte von u und v zu bestimmen:

$$\begin{array}{ll}
-u \cdot \text{IV}: & -\mu \cdot D \cdot u = a \cdot d^2 \cdot u^2 - a \cdot d \cdot e \cdot u \cdot v + \frac{1}{2} \cdot e \cdot u \\
-v \cdot \text{V}: & \underline{-\mu \cdot E \cdot v = a \cdot e^2 \cdot v^2 - a \cdot d \cdot e \cdot u \cdot v + \frac{1}{2} \cdot d \cdot v} \\
\text{Addiert, mit VI}: & -\mu \cdot D \cdot u - \mu \cdot E \cdot v \stackrel{!}{=} \mu \cdot F - \mu \cdot \frac{e}{2 \cdot \mu} \cdot u - \mu \cdot \frac{d}{2 \cdot \mu} \cdot v \\
\text{Division durch } -\mu: & D \cdot u + E \cdot v = -F + \frac{h_1}{A+C} \cdot u + \frac{h_2}{A+C} \cdot v
\end{array}$$

oder

$$\text{iii)} \quad F = (G - D) \cdot u + (H - E) \cdot v \tag{43}$$

S ist der Schnittpunkt von i) und iii) falls $A \neq 0$, sonst der Schnittpunkt von ii) und iii). Wir müssen also eine Fallunterscheidung machen.

Wir haben also

$$\begin{array}{ll}
\text{i)} & A \cdot u + B \cdot v = -D - G \\
\text{ii)} & B \cdot u + C \cdot v = -E - H \\
\text{iii)} & (G - D) \cdot u + (H - E) \cdot v = F
\end{array}$$

Es sei z. B. $A \neq 0$ (rechne sonst mit $C \neq 0$ und ii) statt i) !):

- $$A \neq 0 \implies d^2 = \frac{A}{A+C} \neq 0 \implies d \neq 0 \implies h_2 \neq 0$$

- $(G-D) \cdot \text{i)} : A \cdot (G-D) \cdot u + B \cdot (G-D) \cdot v = -(G-D) \cdot (G+D)$
  $A \cdot \text{iii)} : A \cdot (G-D) \cdot u + A \cdot (H-E) \cdot v = A \cdot F$

  subtrahiert : $[B \cdot (G-D) - A \cdot (H-E)] \cdot v = D^2 - G^2 - A \cdot F$

- Ist die eckige Klammer von null verschieden??

  $$[B \cdot (G-D) - A \cdot (H-E)] = B \cdot \left(\frac{h_1}{A+C} - D\right) - A \cdot \left(\frac{h_2}{A+C} - E\right)$$

  $$= \frac{B \cdot h_1 - B \cdot D \cdot (A+C) - A \cdot h_2 + A \cdot E \cdot (A+C)}{A+C}$$

  $$= \frac{B \cdot (B \cdot E - C \cdot D) - A \cdot B \cdot D - B \cdot C \cdot D + A \cdot (B \cdot D - A \cdot E) + A^2 \cdot E + A \cdot C \cdot E}{A+C}$$

  $$= \frac{B^2 \cdot E - B \cdot C \cdot D - A \cdot B \cdot D - B \cdot C \cdot D - A \cdot B \cdot D + A^2 \cdot E + A^2 \cdot E + A \cdot C \cdot E}{A+C}$$

  mit $B^2 \cdot E = A \cdot C \cdot E$ wegen $\det = 0$:

  $$= \frac{2 \cdot (A \cdot C \cdot E - B \cdot C \cdot D - A \cdot B \cdot D + A^2 \cdot E)}{A+C}$$

  $$= \frac{2 \cdot [C \cdot (A \cdot E - B \cdot D) + A \cdot (A \cdot E - B \cdot D)]}{A+C}$$

  $$= \frac{-2 \cdot \cancel{(A+C)} \cdot (B \cdot D - A \cdot E)}{\cancel{A+C}} = -2 \cdot h_2 \neq 0 \text{ !}$$

- also
  $$v = \frac{A \cdot F + G^2 - D^2}{2 \cdot h_2} \tag{44.1}$$

- dann erhalten wir (immer noch im Fall von $A \neq 0 \iff h_2 \neq 0$!)
  $$u = \frac{-D - G - B \cdot v}{A} \tag{44.2}$$

Die gleiche Rechnung für den Fall $C \neq 0$ (und damit $h_1 \neq 0$!) liefert

$$u = \frac{C \cdot F + H^2 - E^2}{2 \cdot h_1} \tag{45.1}$$

und daraus

$$v = \frac{-E - H - B \cdot u}{C} \tag{45.2}$$

Damit ist in allen Fällen $S = (u/v)$ und damit auch die Translation bei der Rücktransformation bekannt!

Nun berechnen wir den Vektor $\overrightarrow{SF}$, der vom Scheitelpunkt zum Brennpunkt der Parabel zeigt:

$$\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{S'F'} = \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4 \cdot a} \end{pmatrix} = \frac{1}{4 \cdot a} \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ -e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4 \cdot a} \cdot \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}}{2 \cdot (A + C)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(h_1)^2 + (h_2)^2}} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot (A + C)^2} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Also

$$\overrightarrow{SF} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \cdot (A + C)^2} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Für den Brennpunkt F der Parabel gilt somit

$$F = (u + r/v + s) \tag{47}$$

Für den „Leitpunkt“ L, also den Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Leitgeraden, gilt

$$L = (u - r/v - s) \tag{48}$$

S und F liegen auf der Symmetrieachse der Parabel.

Also ist $\overrightarrow{SF} \sim \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor.

Daher gilt für diese Symmetrieachse $m = \frac{d}{e}$ oder

$$e \cdot (y - v) = d \cdot (x - u) \tag{49.1}$$

oder

$$h_1 \cdot (y - v) = h_2 \cdot (x - u) \tag{49.2}$$

Für die Leitgerade gilt entsprechend

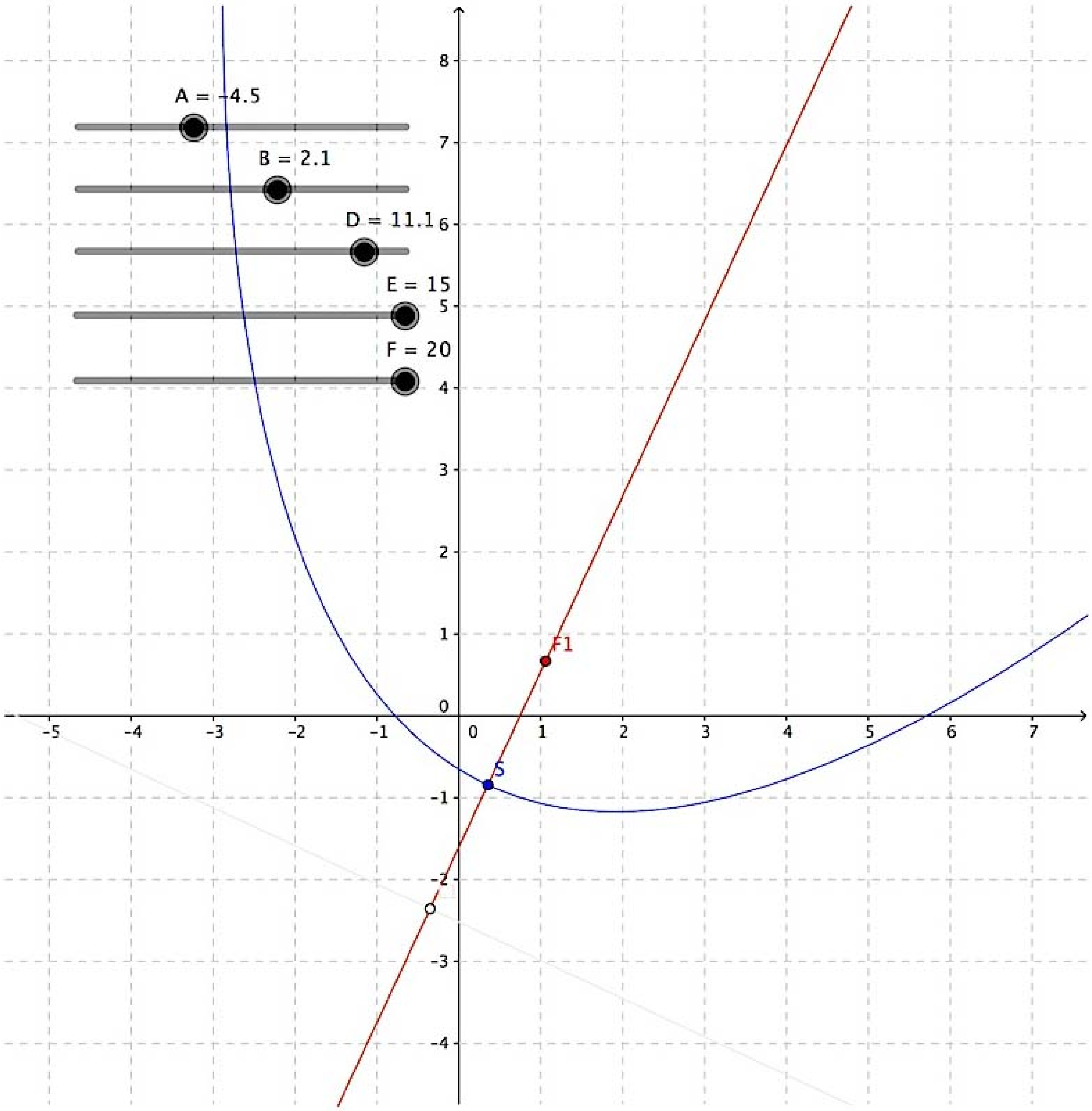
$$e \cdot (x - (u - r)) = -d \cdot (y - (v - s)) \tag{50.1}$$

oder

$$-h_1 \cdot (x - u + r) = h_2 \cdot (y - v + s) \tag{50.2}$$

Damit sind alle relevanten Stücke bekannt im Falle von DET $\neq 0$. Sie können vom GeoGebra-Programm „parabol.ggb“ sofort berechnet und eingezeichnet werden.

Laden Sie das Programm „parabol.ggb“ von meiner Webseite „www.physastromath/material/ mathematik/conics“ herunter. Dieses Programm bietet keinen Schieberegler an für den Koëffizienten C. Der Wert von C wird durch die Bedingung $\det = A \cdot C - B^2 = 0$ festgelegt. Damit ist sichergestellt, dass der parabolische Fall vorliegt. Es ist also $C = \dfrac{B^2}{A}$, weshalb das Programm für A den Wert 0 nicht akzeptieren kann.



Auf den Seiten 15 bis 19 haben wir gezeigt:

Ist (1) äquivalent zu (21), sind wir also im Fall 4, so gilt det $= 0$ nach (27) und DET $\neq 0$ nach (34) und (39).

Wir müssen nun noch umgekehrt zeigen, dass im Falle von det $= 0$ und DET $\neq 0$ die Lösung von (1) immer kongruent ist zu einer Lösung von (25). Wir zeigen wieder, wie man λ_1, λ_2, μ, a, d, e, u und v bestimmen muss, damit die Gleichungen I bis VII erfüllt sind und (12) respektive (33) die beiden Lösungskurven aufeinander abbilden.

Es sei also det $= 0$ und DET $\neq 0$.

1. Setze $\lambda_1 = A + C$ und $\lambda_2 = 0$

2. Setze e und d gemäss (34)

3. Setze a gemäss (35)

4. Setze μ gemäss (36)

5. Setze u und v nach (44) falls $A \neq 0$,

setze u und v nach (45) falls $A = 0$ und $C \neq 0$

6. Zeige nun, dass mit diesen Werten die Gleichungen I bis VII erfüllt sind!

Die Beweise zu **6.** sind nicht schwierig. Sind sie geführt, ist auch bewiesen, dass die Gleichungen (1) und (25) äquivalent sind. Ihre Lösungskurven, also die beiden Lösungsparabeln, werden durch (12) resp. (33) aufeinander abgebildet.

Damit ist auch der Fall 4 unserer Tabelle vollständig abgehandelt.

4 Die „entarteten" Fälle ⑤ und ⑥

Die beiden Fälle lassen sich genau gleich behandeln. Im Fall ⑤ ist $A \neq 0$, im Fall ⑥ ist $C \neq 0$. Es können nicht A und C gleichzeitig null sein, da sonst wegen $0 = \det = A \cdot C - B^2$ auch B und somit alle drei quadratischen Koëffizienten von (1) null wären.

Es sei also (1) äquivalent zu

$$(x')^2 + 2 \cdot D \cdot x' + A \cdot F = 0 \tag{51}$$

Die Lösungsmengen von (1) sollen durch die *Drehstreckung*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix} \tag{52}$$

auf die Lösungsmenge von (51) abgebildet werden.

Wir setzen die Werte für (x'/y') von (52) in (51) ein und erhalten

$$(d \cdot x - e \cdot y - d \cdot u + e \cdot v)^2 + 2 \cdot D \cdot (d \cdot x - e \cdot y - d \cdot u + e \cdot v) + A \cdot F = 0$$

Ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} &d^2 \cdot u^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot u \cdot v - 2 \cdot d^2 \cdot u \cdot x + 2 \cdot d \cdot e \cdot u \cdot y + e^2 \cdot y^2 + 2 \cdot d \cdot e \cdot v \cdot x \\ &-2 \cdot e^2 \cdot v \cdot y + d^2 \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot x \cdot y + e^2 \cdot y^2 + 2 \cdot D \cdot d \cdot x - 2 \cdot D \cdot e \cdot y \\ &-2 \cdot D \cdot d \cdot u + 2 \cdot D \cdot e \cdot v + A \cdot F = 0 \end{aligned}$$

Der Koëfizientenvergleich mit (1) liefert für eine Konstante $\mu \neq 0$ die Gleichungen

I $\quad \mu \cdot A = d^2$

II $\quad \mu \cdot B = -d \cdot e$

III $\quad \mu \cdot C = e^2$

IV $\quad \mu \cdot D = -d^2 \cdot u + d \cdot e \cdot v + D \cdot d$

V $\quad \mu \cdot E = d \cdot e \cdot u - e^2 \cdot v - D \cdot e$

VI $\quad \mu \cdot F = A \cdot F + d^2 \cdot u^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot v + e^2 \cdot v^2 - 2 \cdot D \cdot d \cdot u + 2 \cdot D \cdot e \cdot v$

Die Forderung $d^2 + e^2 = 1$ lassen wir hier fallen!

Wir ziehen wieder einige Schlüsse aus unseren Gleichungen:

a) $\mu^2 \cdot \det = \mu^2 \cdot (A \cdot C - B^2) = \mu \cdot A \cdot \mu \cdot C - (\mu \cdot B)^2 =$
$d^2 \cdot e^2 - (-d \cdot e)^2 = d^2 \cdot e^2 - d^2 \cdot e^2 = 0$

Es gilt somit
$$\det = 0 \tag{53}$$

b) $\mu^2 \cdot h_1 = \mu^2 \cdot (B \cdot E - C \cdot D) = \mu \cdot B \cdot \mu \cdot E - \mu \cdot C \cdot \mu \cdot D =$
$-d \cdot e \cdot (d \cdot e \cdot u - e^2 \cdot v - D \cdot e) - e^2 \cdot (-d^2 \cdot u + d \cdot e \cdot v + D \cdot d) =$
$-\cancel{d^2 \cdot e^2 \cdot u} + \cancel{d \cdot e^3 \cdot v} + \cancel{d \cdot e^2 \cdot D} + \cancel{d^2 \cdot e^2 \cdot u} - \cancel{d \cdot e^3 \cdot v} - \cancel{d \cdot e^2 \cdot D} = 0$

Es gilt also
$$h_1 = 0 \quad \text{und} \quad B \cdot E = C \cdot D \tag{54}$$

c) Genauso erhält man aus $\mu^2 \cdot h_2$
$$h_2 = 0 \quad \text{und} \quad B \cdot D = A \cdot E \tag{55}$$

d) Wegen $\det = 0$ gilt immer noch $-\mathrm{DET} \cdot (A + C) = (h_1)^2 + (h_2)^2$
Aus (54) und (55) erhalten wir somit
$$\mathrm{DET} = 0 \tag{56}$$

Die spur kann ja nicht null sein wegen $\mu \cdot A + \mu \cdot C = d^2 + e^2$!

Wir sind damit zwingend in der Situation 5 oder 6 mit

$$\det = 0,\ \mathrm{DET} = 0 \ \text{ und } \ (A \neq 0 \text{ oder } C \neq 0)$$

Wir geben nun eine explizite Drehstreckung an, welche in dieser Situation die Lösungen von (1) auf die Lösungen von 5 oder 6 abbildet, und wir zeigen auch, wie diese Lösungen aussehen.

Sei also zuerst $A \neq 0$ (Fall 5)

Wir multiplizieren (1) mit A und erhalten mit $\det = 0$ und $h_2 = 0$

$$A^2 \cdot x^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot y + A \cdot C \cdot y^2 + 2 \cdot A \cdot D \cdot x + 2 \cdot A \cdot E \cdot y + A \cdot F = 0$$
$$A^2 \cdot x^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot x \cdot y + B^2 \cdot y + 2 \cdot A \cdot D \cdot x + 2 \cdot B \cdot D \cdot y + A \cdot F = 0$$
$$(A \cdot x + B \cdot y)^2 + 2 \cdot D \cdot (A \cdot x + B \cdot y) + A \cdot F = 0$$

Die Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{57}$$

führt also (1) über in die äquivalente Gleichung

$$(x')^2 + 2 \cdot D \cdot x' + A \cdot F = 0 \tag{58}$$

Die Lösungen von (1) erhalten wir somit aus den Lösungen von (58), wenn wir die inverse Abbildung von (57) darauf anwenden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{A^2 + B^2} \cdot \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{59}$$

Die Lösungen von (58) hängen nur von der Diskriminante der quadratischen Gleichung ab. Diese ist

$$4 \cdot D^2 - 4 \cdot A \cdot F = 4 \cdot (D^2 - A \cdot F)$$

Ist sie negativ, so hat (58) keine Lösungen. Damit hat auch (1) keine Lösungen.

Ist die Diskriminante null, also $D^2 = A \cdot F$, so ist die einzige Lösung von (58) $x' = -D$ und y' ist beliebig. Die Lösungsmenge von (58) ist eine Gerade durch $x' = -D$, welche parallel ist zur y'-Achse. Bildet man zwei Punkte dieser Geraden, z. B. $(-D/0)$ und $(-D/1)$ mit (59) ab, so hat man 2 Punkte der Lösungsgeraden von (1).

Ist die Diskriminante positiv, also $D^2 > A \cdot F$, so gibt es zwei Lösungen für x':

$$x' = -D \pm \sqrt{D^2 - A \cdot F}$$

Zu diesen Werten von x' gehören zwei parallele Geraden als Lösung von (58), welche wiederum mit (59) auf die beiden parallelen Lösungsgeraden von (1) abgebildet werden können.

Wenn A null ist, muss zwingend gelten $C \neq 0$

Sei also jetzt $C \neq 0$ (Fall ⑥)

Dann multipliziert man (1) mit C und erhält ganz ähnlich

$$(x')^2 + 2 \cdot E \cdot x' + C \cdot F = 0 \tag{60}$$

mit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{61}$$

Die entscheidende Diskriminante ist jetzt

$$4 \cdot (E^2 - C \cdot F)$$

und die Rücktransformation erfolgt durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{B^2 + C^2} \cdot \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{62}$$

Die Diskussion der Lösungen von (60) erfolgt vollkommen analog zum Fall ⑤

Damit sind die „entarteten“ parabolischen Fälle ⑤ und ⑥ in eine Richtung abgehandelt: Ist (1) äquivalent zu ⑤ oder ⑥, dann gilt $\det = 0$ und $\mathrm{DET} = 0$ und die Lösungsmenge von (1) folgt der gegebenen Beschreibung.

Nun müssen wir noch umgekehrt zeigen, dass im Falle von $\det = 0$ und $\mathrm{DET} = 0$ folgt, dass (1) äquivalent ist zu ⑤ (im Falle von $A \neq 0$). Aus $\det = 0$ und $\mathrm{DET} = 0$ folgt aber nach (39) $h_1 = 0$ und $h_2 = 0$, somit $B \cdot E = C \cdot D$ und $B \cdot D = A \cdot E$. Das sind genau die Voraussetzungen dafür, dass die Transformationen (57) resp. (59) eine Äquivalenz der Lösungsmengen von (1) und ⑤ vermitteln!

5 Die hyperbolischen Fälle ⑦ und ⑧

In den Fällen ⑦ und ⑧ soll die Gleichung (1) äquivalent sein zu

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = \kappa \tag{63}$$

mit $a^2 \geq b^2 > 0$ und $\kappa \in \{0, 1\}$

Die Situation ist bis auf wenige Vorzeichenunterschiede völlig identisch mit derjenigen bei den Ellipsen, sie lässt sich auf dieselbe Art behandeln.

Die Parameter u, v, d und e der Rücktransformation der Lösungskurve von (63) auf diejenige von (1) werden genau gleich berechnet wie im elliptischen Fall, die Formeln (8), (19) und (20) sind hier genauso gültig.

Im Fall ⑦ gibt es einen Vorzeichenunterschied bei der Berechnung von b^2:

$$a^2 = \frac{-\text{DET}}{\det \cdot \lambda_2} = \frac{-\text{DET}}{\lambda_1 \cdot (\lambda_2)^2} \tag{13.1 = 64.1}$$

$$b^2 = \frac{+\text{DET}}{\det \cdot \lambda_1} = \frac{+\text{DET}}{(\lambda_1)^2 \cdot \lambda_2} \tag{64.2}$$

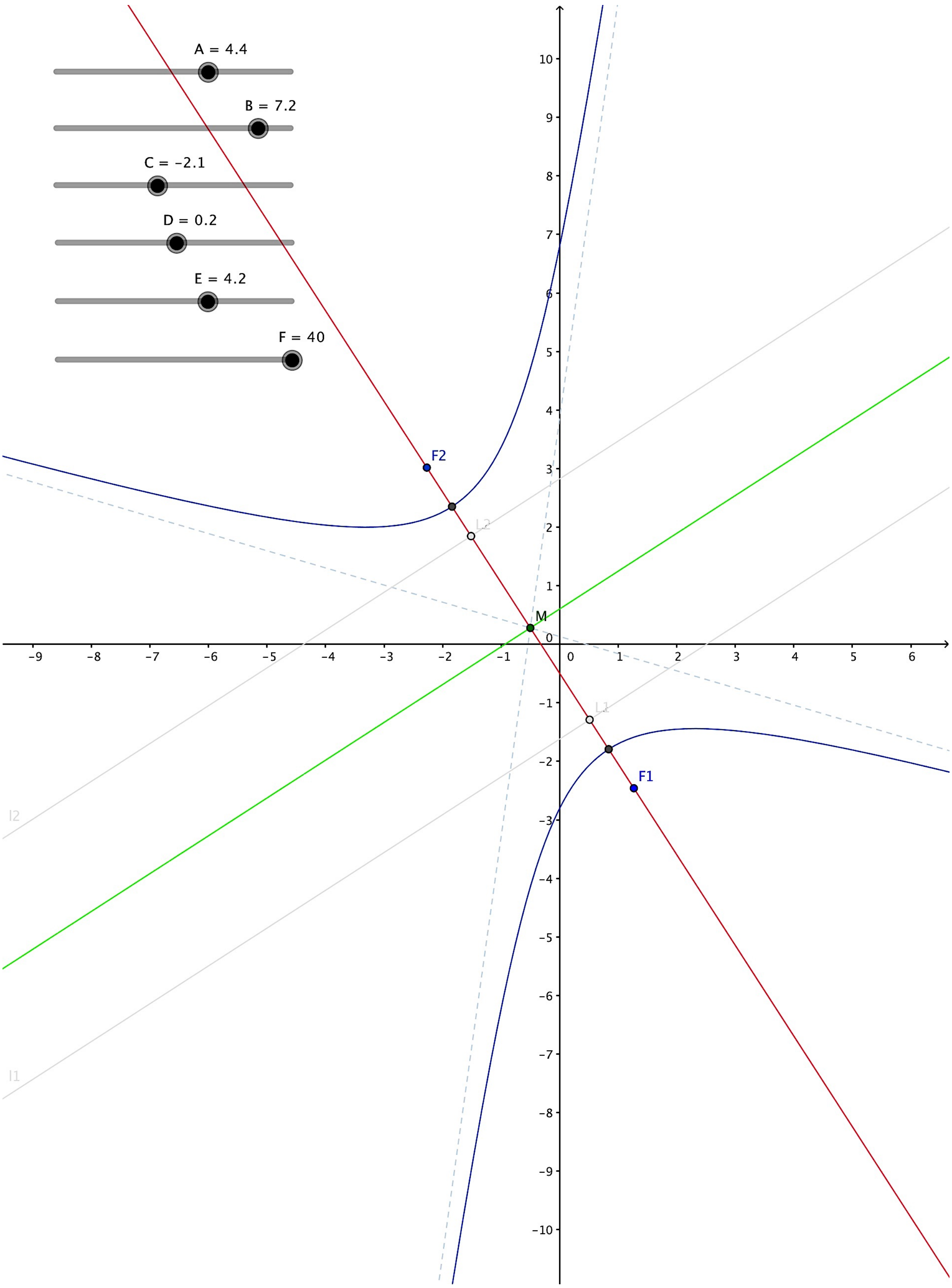
Weil aber bei Hyperbeln gilt $c^2 = a^2 + b^2$ (statt $c^2 = a^2 - b^2$ wie bei den Ellipsen) gelten die Formeln für c^2, ε und p weiterhin. (14), (15) und (16) gelten also auch im Fall ⑦.

Im Fall ⑧, also für $\kappa = 0$, setze man $a^2 = (\lambda_1)^2$ und $b^2 = -\lambda_1 \cdot \lambda_2$. Die Lösungsmenge für (x'/y') besteht dann aus den beiden Geraden

$$y' = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}} \cdot x' = \pm\sqrt{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot x' \tag{65}$$

die sich im Nullpunkt schneiden. (12) bildet diese beiden Geraden auf die Lösungsmenge von (1) ab im Fall ⑧.

Die folgende Seite zeigt den Output des Programms „ellipt_hyperbol.ggb“ in einem hyperbolischen Fall.


A = 4.4
B = 7.2
C = −2.1
D = 0.2
E = 4.2
F = 40
F2
L2
M
L1
F1
l2
l1