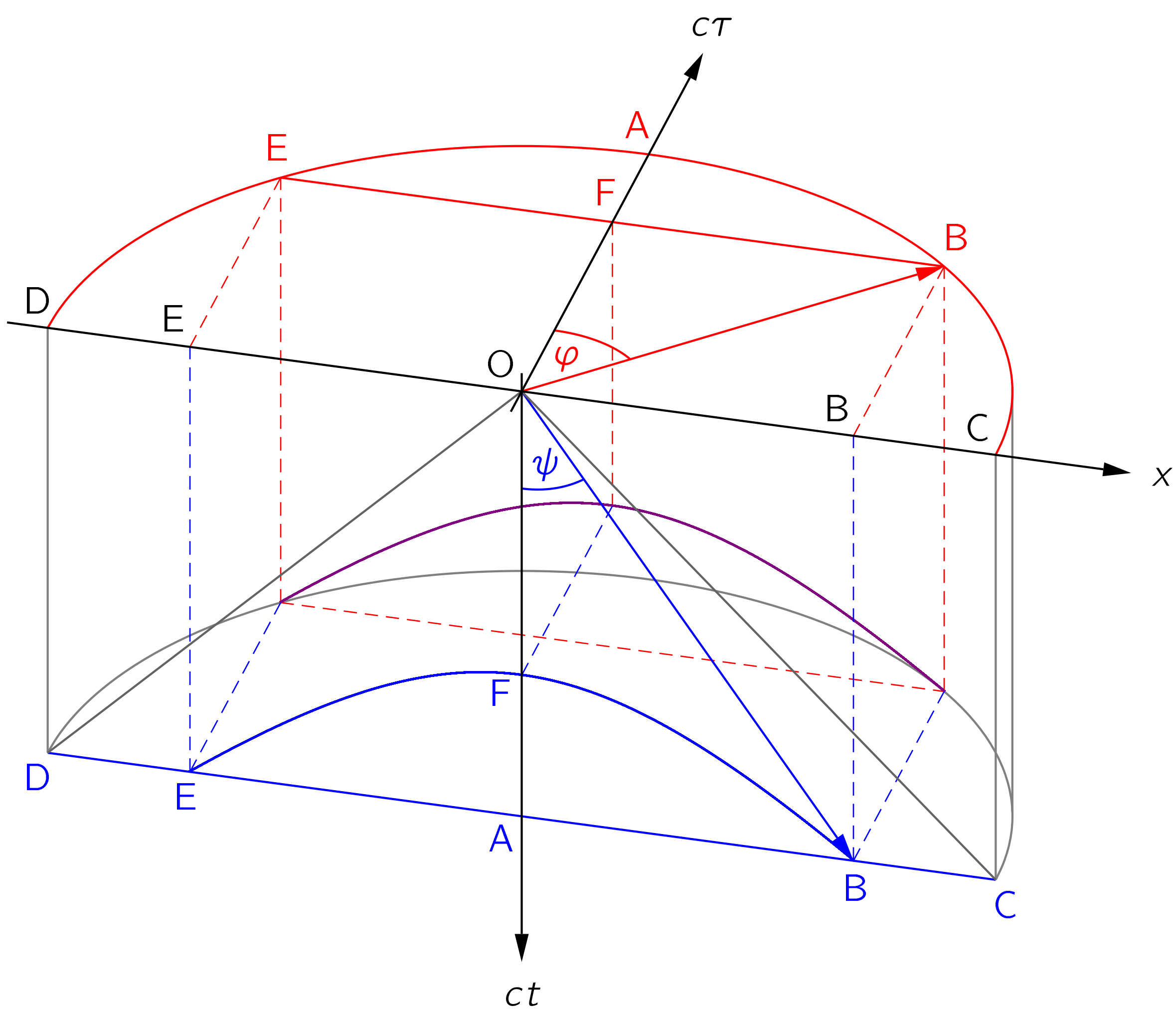
Minkowski- und Epsteindiagramme ineinander umwandeln



Version 1.0 vom August 2014

Alfred Hepp, Bergün und Martin Gubler, Frauenfeld

1 Eine neue Sichtweise

Im Anhang B des Buches „Relativitätstheorie anschaulich dargestellt“ beschreibt Lewis C. Epstein, wie man von seinen „Raumeigenzeit-Diagrammen“ zu den in der SRT oft verwendeten „Raumkoordinatenzeit-Diagrammen“ gelangt, [1]. In den folgenden Abschnitten zeigen wir etwas ausführlicher, wie er das macht.

Erst gehen wir, so weit es für das Verständnis der Umwandlung nötig ist, einzeln auf das Raumkoordinatenzeit-Diagramm mit x- und ct-Achse ein, das wir Minkowski-Diagramm nennen und dann auf das Raumeigenzeit-Diagramm mit x- und $c\tau$-Achse ein, das bei uns Epstein-Diagramm heissen soll.

Hat man etwas auf eine Art verstanden, hat man darin herumgestochert. Hat man es aber auf zwei verschiedene Arten verstanden, so hat man es erfaßt.

Anhang B
Eine andere Sichtweise

Die Umwandlung des Raumeigenzeit-Diagramms in ein Raumkoordinatenzeit-Diagramm.

In diesem Anhang wird das im vorliegenden Buch verwendete Raumzeit-Diagramm mit demjenigen verglichen, das sonst meistens verwendet wird.
In unseren Diagrammen wird die Lichtgeschwindigkeit als horizontale Linie dargestellt, während viele andere Bücher sie als eine um 45° geneigte Linie darstellen. Wie kommt das?
In unseren Diagrammen wird die Eigenzeit gegen den Raum abgetragen, während in anderen Büchern die Koordinatenzeit gegen den Raum abgetragen wird. Welche Version ist nun die richtige? Beide sind es. Sie sind verschiedene Sichtweisen der gleichen Sache, wie der Grundriß und der Aufriß eines Hauses. Beide besitzen Vor- und Nachteile. Wesentlich ist nur, daß man problemlos

Bevor ich erkläre, wie man hin und her pendelt, will ich zuerst zeigen, wie wir uns explizit die Beziehung zwischen Raum, Eigenzeit und Koordinatenzeit vorzustellen haben. Angenommen, ein Raumeigenzeit-Diagramm, wie eines aus diesem Buch, würde als Grundriß gezeichnet (siehe Abb. B-1). In diesem Fall entspricht die Bahnlänge O_pP_p unserer verstrichenen Zeit, der Koordinatenzeit, die ein Reisender benötigt, um direkt von O_p nach P_p zu gelangen (das kleine p bedeutet, daß O_p und P_p sich auf dem gleichen Raumeigenzeit-Diagramm befinden). Verantwortlich dafür ist der Mythos, die Geschwindigkeit aller Dinge durch die Raumzeit sei konstant; siehe Kapitel 5.
Nun stellen wir uns vor, dem Diagramm würde eine weitere Dimension hinzugefügt
Punkt P_p wird
Dimension
Ebene

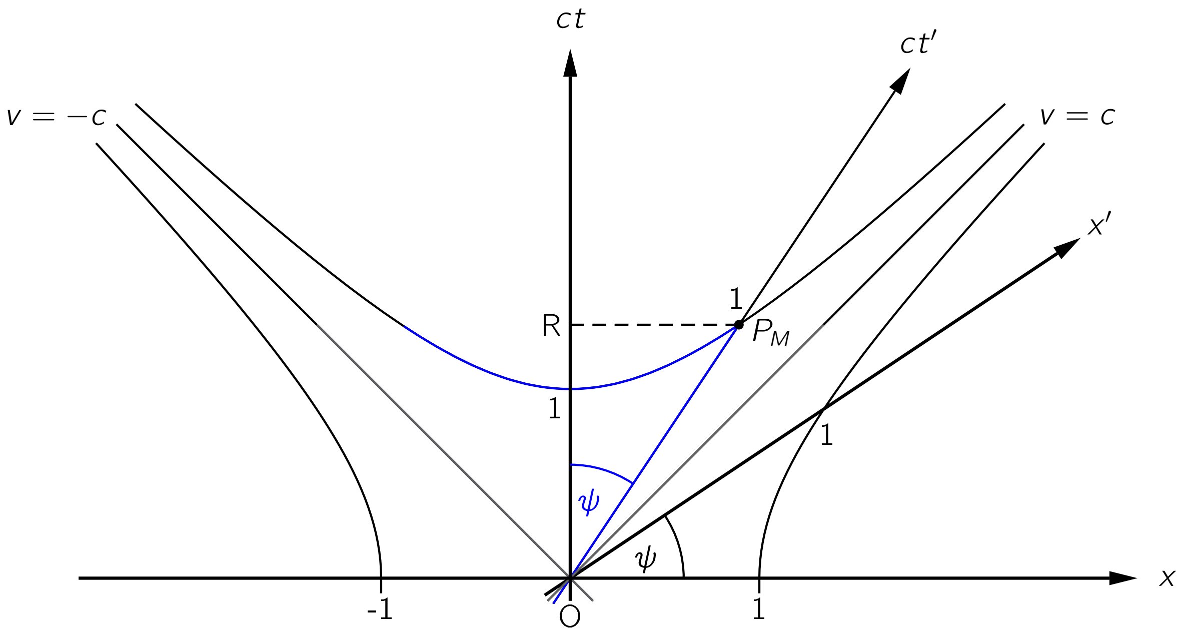
2 Das Minkowski-Diagramm

Wer sich genauer mit dem Minkowski-Diagramm befassen will, sei auf die umfangreiche Literatur dazu verwiesen, z. B. [2],[3].

Gegenüber einem ruhenden System, dargestellt durch senkrecht aufeinander stehende x- und ct-Achsen, bewege sich in positiver x-Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit v ein zweites. Dessen Koordinatenachsen x' und ct' stehen schiefwinklig aufeinander, je um den Winkel ψ nach innen gedreht. Für diesen Winkel gilt:

$$\tan\psi = \frac{v}{c}$$

Sogenannte *Eichhyperbeln* legen durch ihre Schnittpunkte mit den Achsen auf diesen die Einheiten fest. So hat der Punkt P_M die Koordinaten x'= 0 und ct'= 1. Die Strecke OP_M ist also gleich der



Einheitsstrecke, und das ist c mal die seit $t' = 0$ im bewegten System verflossene Zeit. Andererseits ist die Strecke OR auf der ct-Achse gleich c mal die Zeit, welche seit $t = 0$ im Ruhesystem vergangen ist.

Ist $v = c$, also $\tan\psi = 1$ und $\psi = 45°$, fallen x'- und ct'-Achse zur rechten *Lichtgeschwindigkeitsgeraden* zusammen.

Natürlich gibt es auch eine Lichtgeschwindigkeitsgerade für $v = -c$, und man überlege sich etwa, warum weitere Achsen ct'', ct''' usw. immer in dem durch die linke und die rechte Lichtgeschwindigkeitsgeraden gebildeten Sektor nach oben zeigen müssen!

(Farbig hervorgehoben sind hier und im Epstein-Diagramm diejenigen Stücke, welche im Abschnitt 4 die beiden Diagramme vertreten. Aus diesen farbigen Stücken lässt sich jeweils das ganze Diagramm wieder rekonstruieren!)

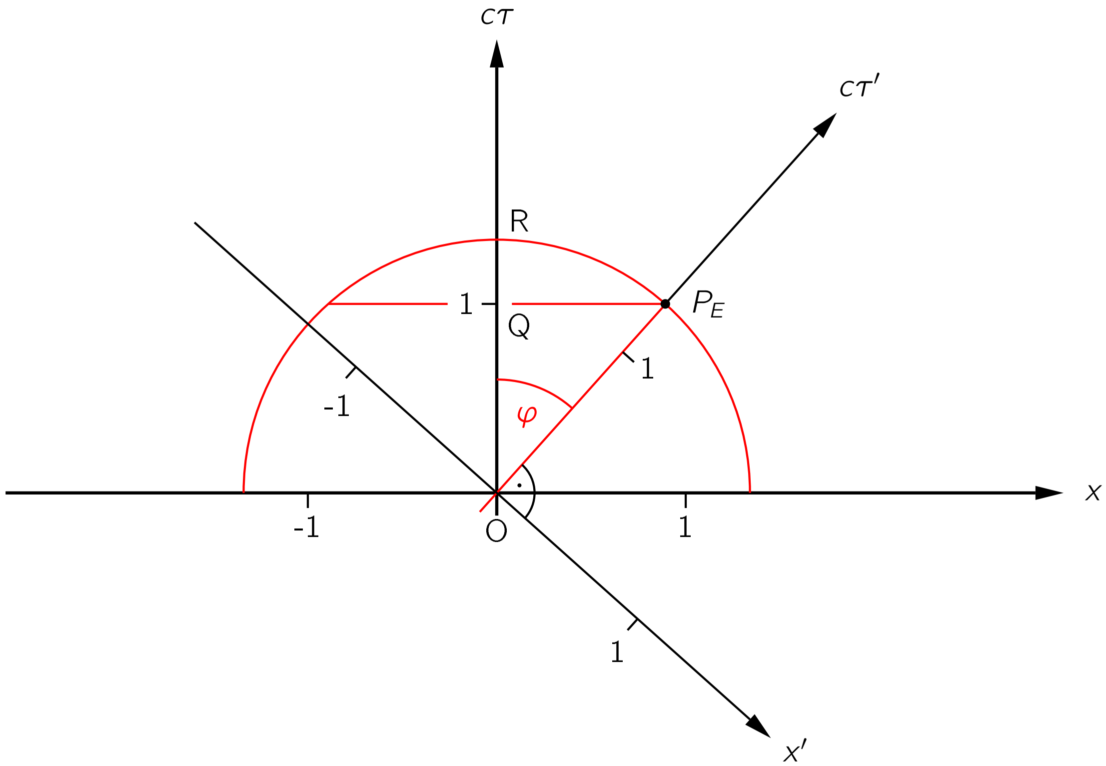
Isochronen, also Linien mit gleichem Uhrenstand nach der Synchronisation in O sind hier also Hyperbeln. Synchronen, also Linien, auf denen gleichzeitige Ereignisse des Ruhesystems liegen, sind Parallelen zur x-Achse.

3 Das Epstein-Diagramm

Eine Einführung in Epstein-Diagramme gibt der Abschnitt C von [4], im Internet zu finden unter „www.relativity.li/de/epstein/lesen/c0_de".

Wieder bewege sich gegenüber dem ruhenden System x-$c\tau$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung ein zweites mit den Achsen x' und $c\tau'$. Beide Systeme sind rechtwinklig, das bewegte ist um den Winkel φ gegenüber dem ruhenden abgekippt. Für φ gilt:

$$\sin\varphi = \frac{v}{c}$$

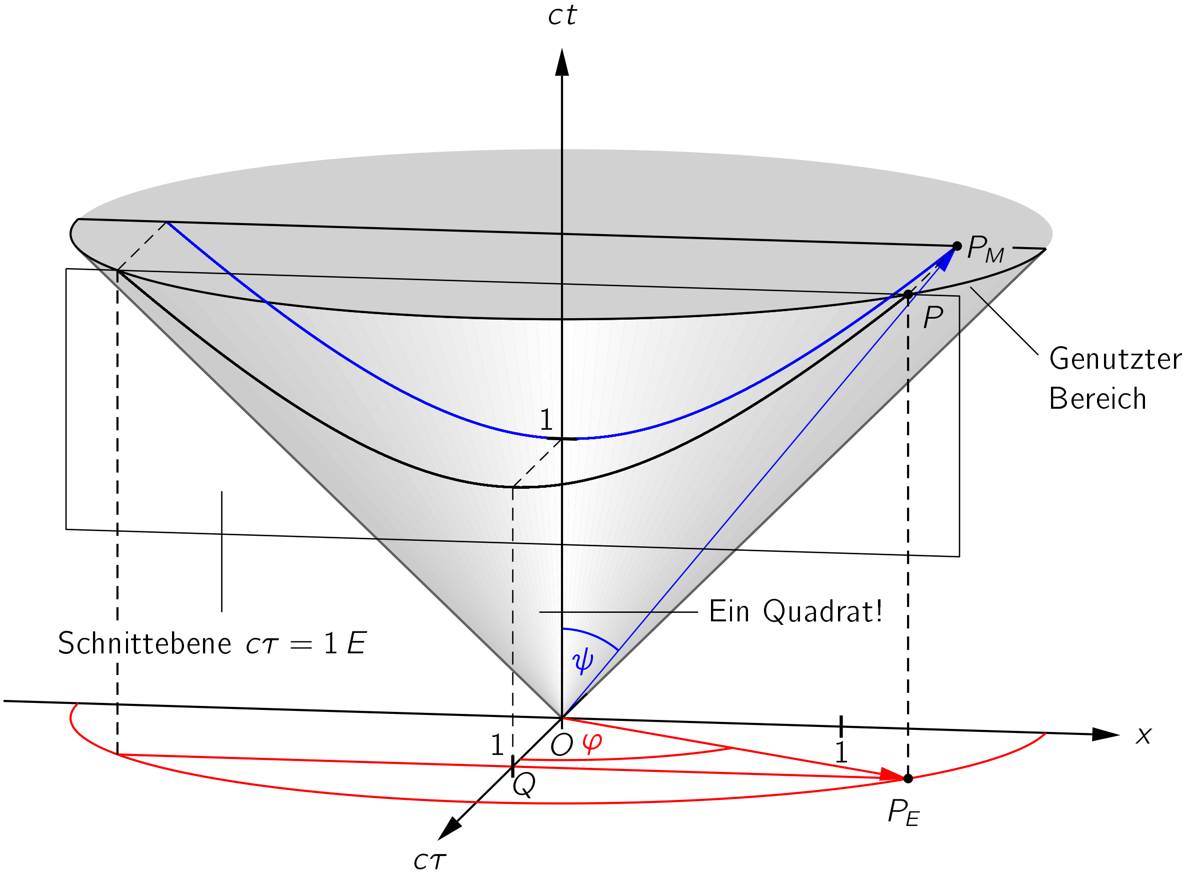


Die Einheitsstrecken sind auf allen Achsen gleich lang. Alle Objekte legen in derselben Zeit gleichlange Strecken im Diagramm zurück. Werden die Uhren beider Systeme bei der Begegnung in O korrekt synchronisiert, kann in jedem System der Stand jeder beliebigen Uhr durch Projektion auf die $c\tau$- resp. die $c\tau'$-Achse abgelesen werden.

Isochronen im ungestrichenen System sind also jetzt Parallelen zur x-Achse, Synchronen im ungestrichenen System sind Halbkreise mit Zentrum in O. Licht bewegt sich in jedem System senkrecht zur Eigenzeit-Achse, also parallel zur Raum-Achse. Zu einem Vorgang gehören nicht 2 Punkte oder Ereignisse, sondern 2 gleich lange Strecken.

4 Epsteins Vorschlag der Diagramm-Umwandlung

Wir zeichnen nun im Aufriss (also auf der „Rückwand“) ein Minkowski-Diagramm mit ct- und x-Achse. Im Grundriss (also auf dem „Boden“) zeichnen wir ein Epstein-Diagramm mit $c\tau$- und x-Achse. Die beiden x-Achsen lassen wir dabei zusammenfallen. Um die ct-Achse zeichnen wir mit Spitze in O den Kegel mit Öffnungswinkel 45°:



Bilden wir zur roten Isochronen durch Q und P_E die vertikale gestrichelte Ebene, so schneidet diese den Kegel in der schwarz gezeichneten Hyperbel. Projizieren wir diese Hyperbel auf die Minkowski-Ebene, so erhalten wir die blaue Hyperbel, welche gerade die entsprechende Isochrone im Minkowski-Diagramm ist!

Stellen wir auf die rote Synchrone (den Halbkreis um O durch P_E) den Halbzylinder mit ct als Achse, so schneidet dieser den Kegel ebenfalls in einem Halbkreis. Projizieren wir diesen schwarzen Halbkreis wieder auf die Minkowski-Ebene, so erhalten wir die Gerade durch P_M , welche gerade die entsprechende Synchrone im Minkowski-Diagramm ist !

Die roten Stücke im Epstein-Diagramm werden bei dieser Umprojektion über den Kegel genau auf die blauen Stücke im Minkowski-Diagramm abgebildet - und umgekehrt!

Derart lassen sich alle Punkte der beiden Ruhesysteme eindeutig aufeinander abbilden, und dabei werden Synchronen auf Synchronen und Isochronen auf Isochronen abgebildet. Die Uhren in P_E und in P_M haben beide den Uhrenstand 1!

Analytisch:

Der Kegel lässt sich wie folgt schreiben:

$$ct = \sqrt{c^2\tau^2 + x^2}, \quad 0 \leq ct \leq ct_{end}, \quad c\tau \geq 0$$

ct_{end} sei die willkürlich gewählte Kegelhöhe. Man sieht, dass diese auch gleich dem Radius der roten Synchrone ist.

Wir schneiden den Kegel mit einer Ebene der Gleichung

$$c\tau = 1E,$$

wobei E die Länge der Einheitstrecken auf den Achsen bedeute.

Wir erhalten so die schwarze Hyperbel und projizieren diese auf die blaue in der Minkowski-Ebene. Die blaue Hyperbel ist wieder als eine Isochrone das Bild der roten Geraden durch Q und P_E!

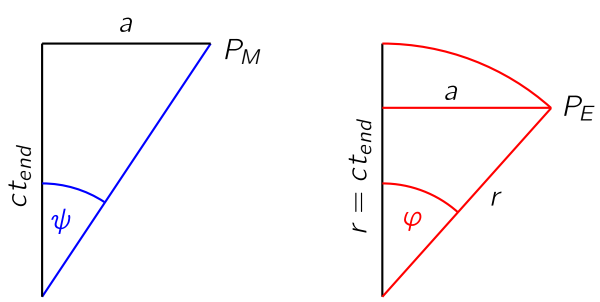
Deren Gleichung erhalten wir als

$$ct = \sqrt{E^2 + x^2}, \quad E \leq ct \leq ct_{end},$$

indem wir die Ebenengleichung in jene des Kegels einsetzen.

Die schwarze Gerade durch P_M auf der Höhe ct_{end}, welche die Hyperbel abschliesst, ist als Bild des roten Halbkreises um O nun eine Synchrone.

Die folgenden Figuren zeigen, wie wir vom $\tan\psi$ des Minkowski-Diagramms zum $\sin\varphi$ des Epstein-Diagramms gelangen.



P_M ist von der ct-Achse gleich weit entfernt wie P_E von der $c\tau$-Achse. Diesen Abstand nennen wir a. Der Radius r der roten Synchrone des Epstein-Diagramms ist gleich lang wie die Kegelhöhe ct_{end}.

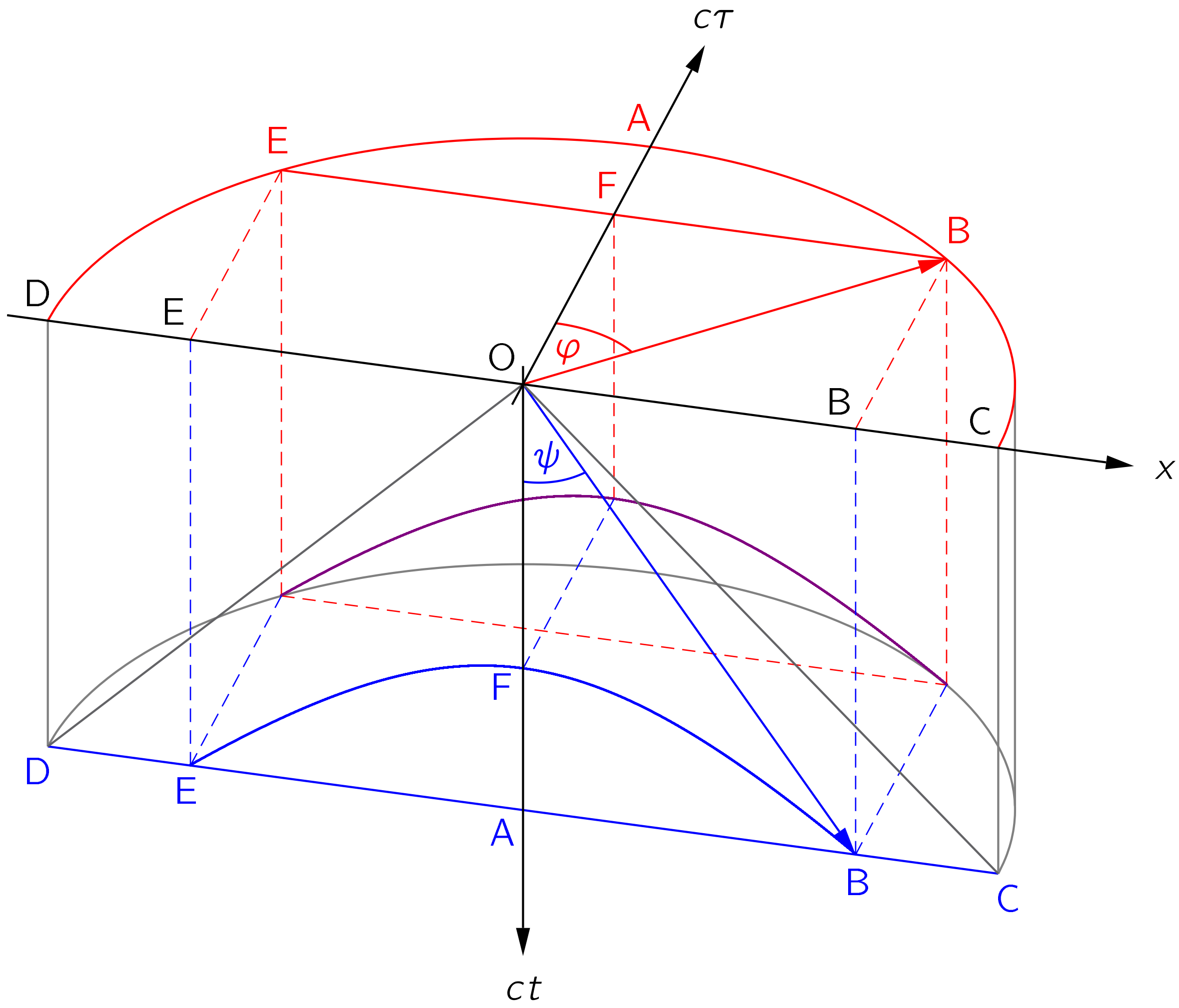
Wir sehen nun, dass

$$\tan\psi = \frac{a}{ct_{end}} \quad \text{bzw.} \quad \sin\varphi = \frac{a}{r}$$

gilt.

5 Eine andere Darstellung

Rotiert man die Zeichnung von p.6 um 180° um die x-Achse, ergibt sich die folgende Ansicht:



Die Epstein-Ebene ist jetzt „oben“ und die Minkowski-Ebene ist „vorne“. Ein Objekt bewegt sich räumlich von O nach B, raumzeitlich hingegen von O nach B respektive von O nach B!

Die Strecken OA, OA, OC, AC, CC und DD sind alle gleich lang.

OC ist die Strecke, welche das Licht in der Zeit $OA = OA$ zurückgelegt hätte, OB ist die Strecke, welche das Objekt B in dieser Zeit zurückgelegt hat. Man kann sofort ablesen, dass gilt

$$\frac{v}{c} = \frac{v \cdot \Delta t}{c \cdot \Delta t} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{OA} = \tan(\psi) \quad \text{und} \quad \frac{v}{c} = \frac{v \cdot \Delta\tau}{c \cdot \Delta\tau} = \frac{OB}{OC} = \frac{FB}{OB} = \sin(\varphi)$$

Die violette Hyperbel in der „Rückwand“ ist sowohl die Projektion der roten Isochronen EFB als auch der blauen Isochronen EFB .

6 Loedel-Diagramme – ein perfekter Kompromiss?

Eine ausführliche Einführung in die Loedel-Diagramme findet man in [5].

In einem Minkowski-Diagramm für 3 Koordinatensysteme bewegt sich das System Grün mit Geschwindigkeit w gegenüber Schwarz und das System Rot mit $-w$ gegenüber Schwarz. Es gilt:

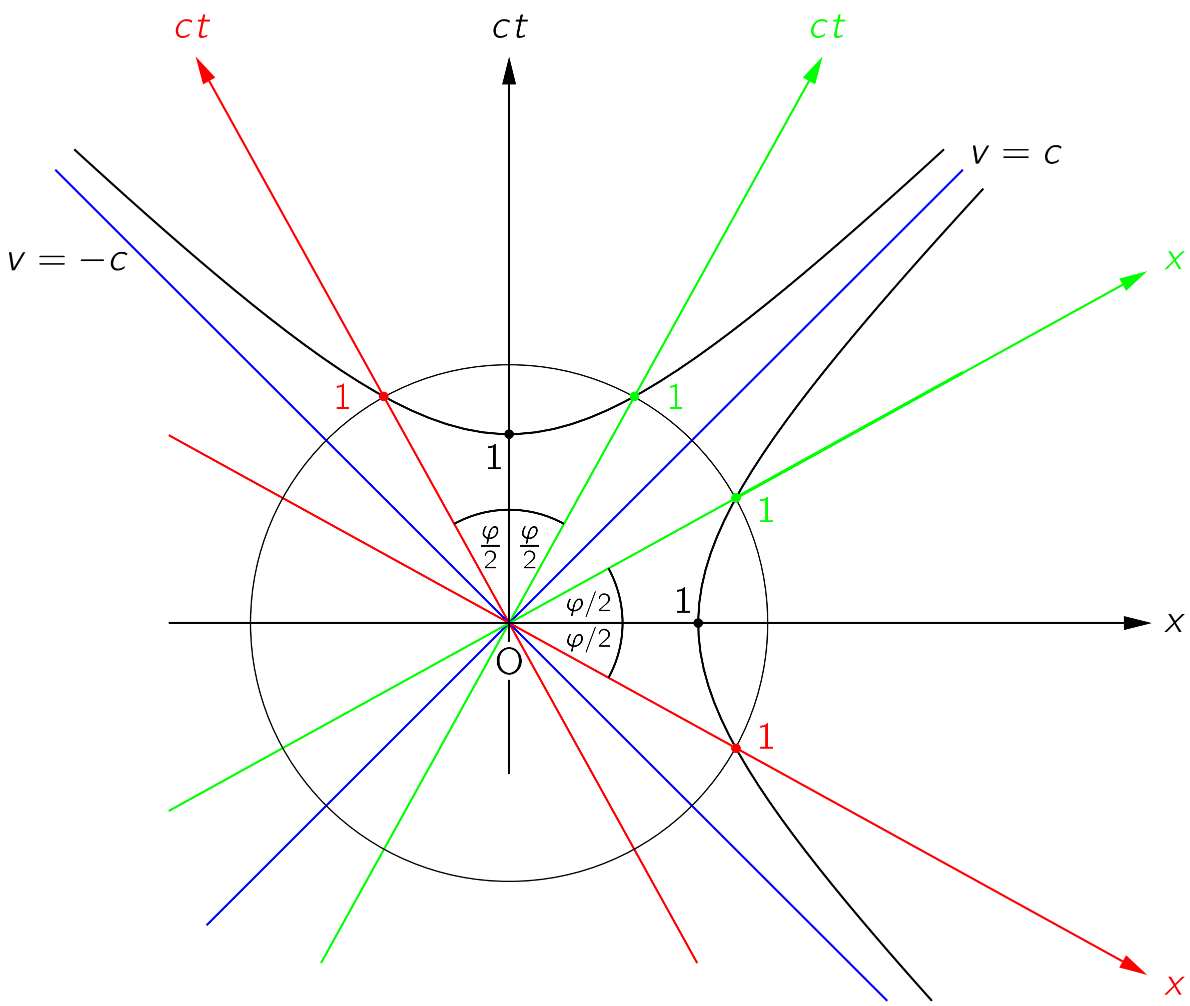
$$\frac{w}{c} = \tan\frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{w}{c} = -\tan\frac{\varphi}{2}$$

Die Relativgeschwindigkeit von Rot und Grün ist demnach $w \oplus w = v$. Für v gilt:

$$\sin\varphi = \frac{v}{c} \text{ !!}$$

(siehe Aufgabe 4 auf p.3 von „Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal – zur Addition von Geschwindigkeiten“ in [6])

Die Eichhyperbeln definieren auf allen 4 Achsen von Rot und Grün gleich lange Einheitsstrecken. Die grüne ct-Achse steht senkrecht auf der roten x-Achse, die rote ct-Achse steht senkrecht auf der grünen x-Achse. Licht bewegt sich für alle entlang der blauen Winkelhalbierenden.



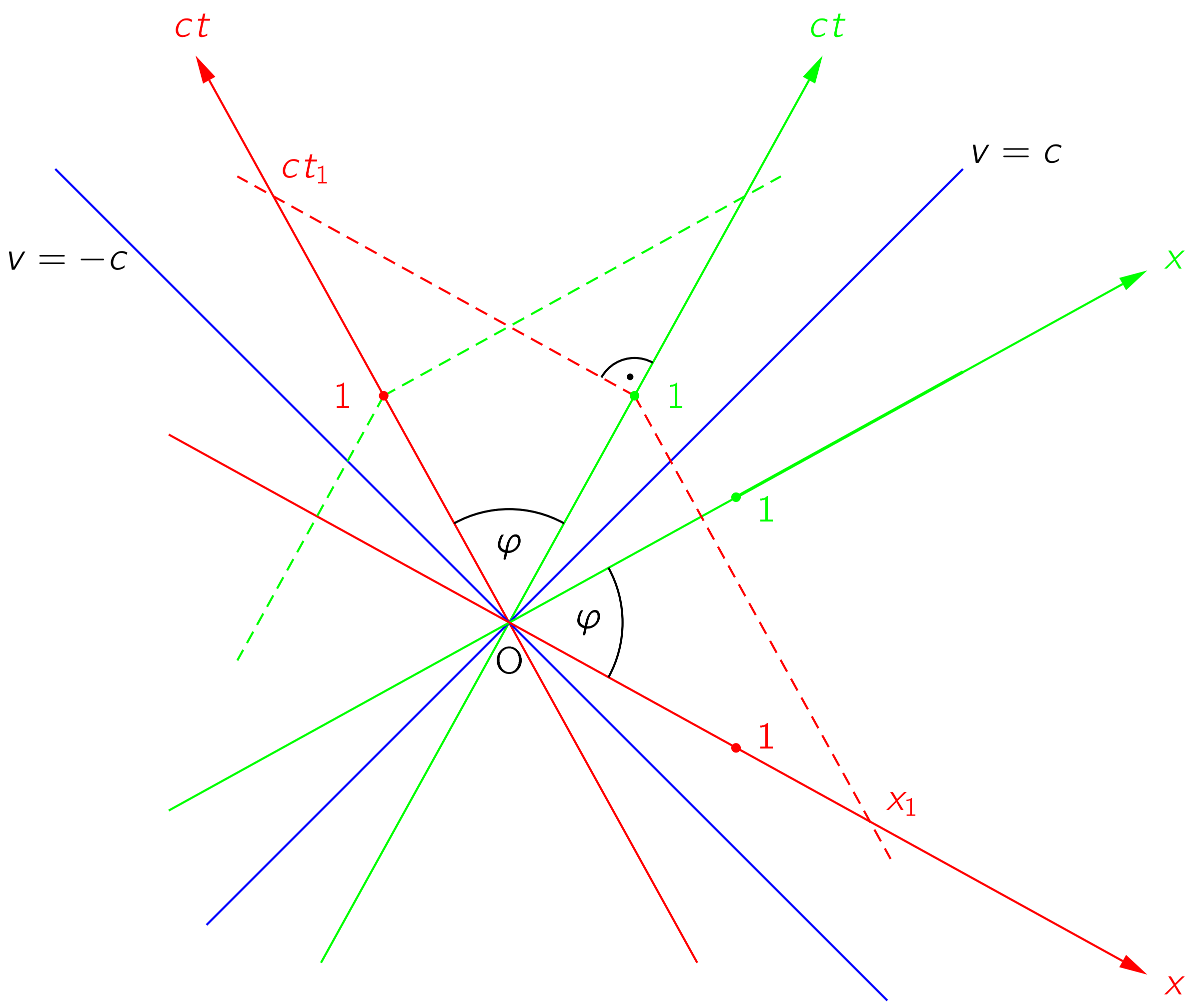
Nun lassen wir das schwarze System weg. Es bleiben noch die Systeme Rot und Grün, jeweils mit φ zwischen roter x-Achse und grüner x-Achse, bzw. grüner ct-Achse und roter ct-Achse. Ähnlich wie beim Epstein-Diagramm können sowohl Grün als auch Rot als Ruhesystem betrachtet werden.

Wie bei Minkowski entsprechen den Ereignissen Punkte in der Zeichenebene, denen durch Projektion parallel zu den Koordinatenachsen eine Zeit ct und ein Ort x zugeordnet werden kann.

Synchronen sind immer noch die Parallelen zur Raumachse. Isochronen sind Hyperbeln analog zur Eichhyperbel für $t = 1$.

Sei Rot unser Ruhesystem, von dem aus wir Grün mit dem Ereignis $(c \cdot 1, 0)$ betrachten. Dies parallel zur roten x-Achse auf die rote ct-Achse projiziert, ergibt dort die Koordinate ct_1, parallel zur roten ct-Achse auf die rote x-Achse projiziert, die Koordinate x_1.

Schön können wir am Dreieck mit der Kathete $c \cdot 1$ und der Hypothenuse $c\dot{t}_1$ die Zeitdilatation ablesen:



Es ist:

$$\frac{c \cdot 1}{c \cdot t_1} = \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

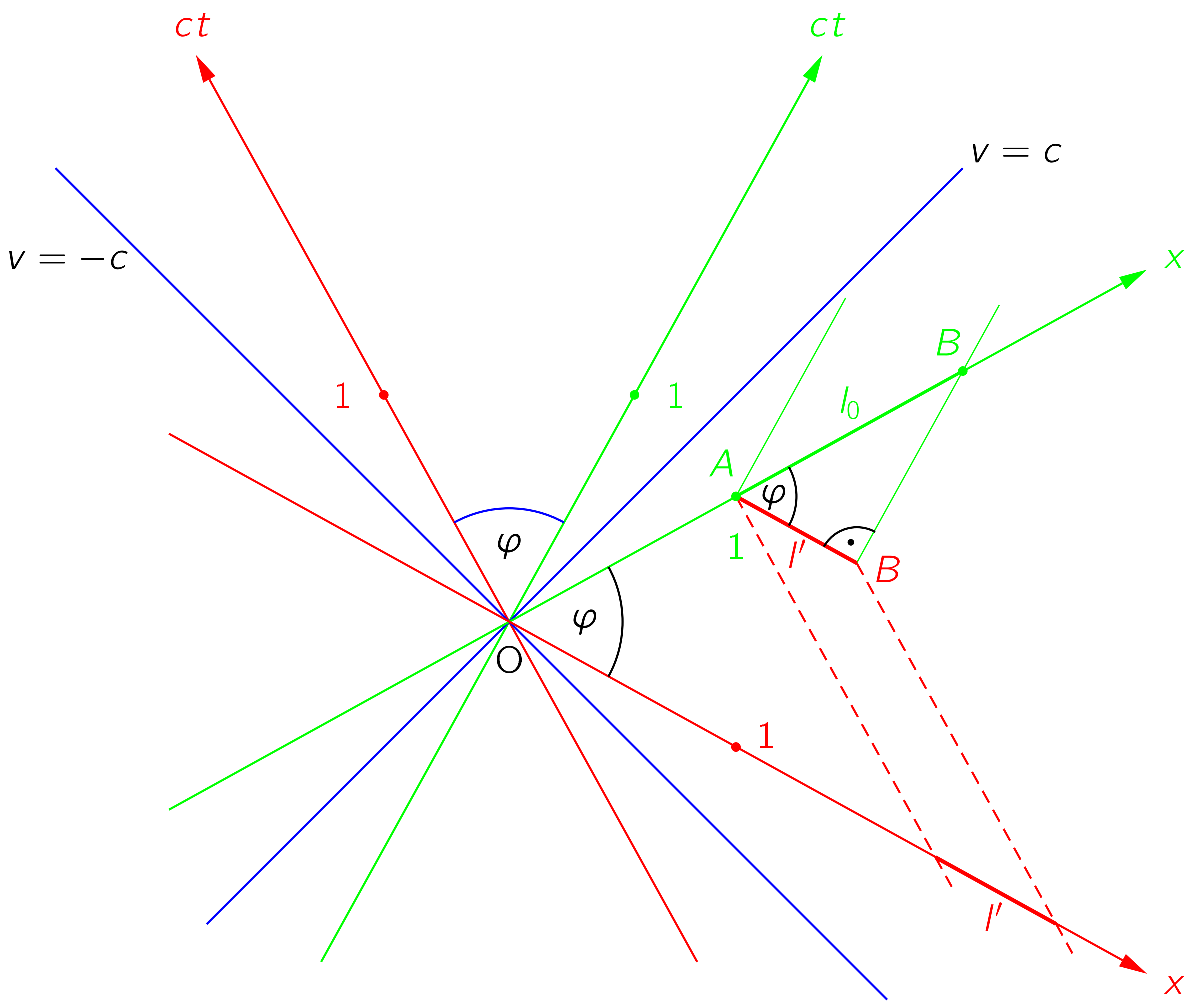
Die Uhr in Grün geht also langsamer!

Zur Demonstration der Längenkontraktion ruhe auf der grünen x-Achse eine Strecke $\overline{AB} = l_0$. Ihre Enden bewegen sich mit der Zeit auf dem gezeichneten Parallelstreifen.

Die Enden der Strecke $\overline{AB} = l'$ sind gleichzeitig im Sinne von Rot (Isochrone) und es gilt:

$$l' = l_0 \cdot \cos\varphi = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die nun verkürzte Länge l' kann durch Projektion parallel zu ct auf der roten x-Achse gemessen werden.



Die Strecke $\overline{BB}$ kann geschrieben werden als

$$\overline{BB} = l_0 \cdot \sin\varphi = l_0 \cdot \frac{v}{c} = \Delta x \cdot \frac{v}{c},$$

wobei $\Delta x = l_0$ ja gleich dem Eigenabstand von Uhren ist, die sich bei A und B befinden. Nach der bekannten Formel für die Desynchronisation

$$c \cdot \Delta t = -\Delta x \cdot \frac{v}{c}$$

geht für Rot die Uhr A um Δt nach!

Literaturverzeichnis

[1] Epstein, Lewis C.: Relativitätstheorie anschaulich dargestellt, Birkhäuser 1988[2]
ISBN 3-7643-2202-0

[2] Bais, Sander: Very Special Relativity, Harvard Universtiy Press 2007
ISBN 978-0-674-02611-7

[3] Freund, Jürgen: Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger, vdf Zürich 2007[3]
ISBN 978-3-8252-2884-2

[4] Eckstein, David: Epstein erklärt Einstein, print on demand by ePubli GmbH Berlin 2013[2]
ISBN 978-3-8442-7136-2

[5] Sartori, Leo: Understanding Relativity, University of California Press 1996
ISBN 0-520-20029-2

[6] Hepp, Alfred und Gubler, Martin: Web-Publikation vom Dezember 2013
http:// www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Relativ/Relativ_06_de.pdf