# 1. Zeitdilatation und relativistischer Dopplereffekt

In der Akustik muss man für die Berechnung der Frequenzänderung zwei Fälle unterscheiden:

a) der Sender ruht im Medium, der Empfänger entfernt sich mit der Geschwindigkeit *v* von der Quelle. Die entsprechende Formel ist dann

$$f_E = f_s \cdot \frac{c-v}{c}$$

b) der Empänger ruht im Medium, der Sender entfernt sich mit der Geschwindigkeit *v* vom Empfänger. Die Frequenzänderung folgt dann der Formel

$$f_E = f_s \cdot \frac{c}{c+v}$$

Wir setzen nun für das Licht zusätzlich voraus, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit *c* des Signals in allen Inertialsystemen dieselbe sei **und** dass diese unabhängig sei vom Bewegungszustand des Senders, ganz so wie es die Wellengleichung von Maxwell fordert, wie es in der Akustik aber nur im Bezugsystem des Ausbreitungsmediums gilt. Für Licht soll es also, im Unterschied zum Schall, kein ausgezeichnetes Bezugssystem geben, in welchem das Trägermedium des Signals ruht.

Wenn es kein ausgezeichnetes Bezugssystem mehr gibt und nur noch eine Relativgeschwindigkeit gemessen werden kann müssten diese beiden Formeln aber dasselbe Ergebnis liefern! Es muss also irgendetwas mit den Frequenzen geschehen wenn Sender und Empfänger bewegt sind gegeneinander. Wenn sich Frequenzen ändern sollen muss aber zwingend etwas mit der *Zeit* geschehen, das ist die *einzige Grösse*, welche bei konstanter Signalgeschwindigkeit die Anzahl der gezählten Schwingungen beeinflussen kann. Wir nehmen also an dass es einen von der Relativgeschwindigkeit *v* abhängigen Faktor *r(v)* gibt sodass gilt

$$\Delta t_v = \Delta t_0 \cdot r(v)$$

$\Delta t_v$ ist dabei ein Zeitintervall im 'schnellen' System, $\Delta t_0$ das entsprechende Zeitintervall im Ruhesystem gemessen. $r(v)$ kann nicht 1 sein für $v \neq 0$ , da sich die beiden Formeln weiter oben unterscheiden. Die Zeit kann also nicht mehr gleich schnell laufen in zwei zueinander bewegten Bezugssystemen, wir müssen uns von Newtons Absoluter Zeit verabschieden!

Für die Funktion $r(v)$ machen wir keine weiteren Voraussetzungen. Nur zugunsten der einfacheren Sprechweise nehmen wir mal an, dass $r(v)$ kleiner sei als 1 für $v \neq 0$ (man kann den ganzen Text auch für den anderen Fall formulieren und kommt zu demselben Ergebnis!).

Im Fall a) bewegt sich der Empfänger, dann tickt also seine Uhr um den Faktor $r(v)$ *langsamer*. Er wird entsprechend eine *grössere* Frequenz messen, in seinen langen Sekunden treffen mehr Schwingungen ein. Die Formel von a) müssen wir somit korrigieren zu

$$f_E = f_s \cdot \frac{c-v}{c} \cdot \frac{1}{r(v)}$$

Im Fall b) ruht der Empfänger, und die Uhr des schnellen Senders tickt *verlangsamt*. Dadurch *sinkt* aus der Sicht des Empfängers seine Sendefrequenz, und wir müssen die Formel von b) korrigieren zu

$$f_E = f_s \cdot \frac{c}{c+v} \cdot r(v)$$

Wenn sich jetzt die beiden Fälle nicht mehr unterscheiden dürfen ergibt sich daraus die Gleichung

$$\frac{c-v}{c} \cdot \frac{1}{r(v)} = \frac{c}{c+v} \cdot r(v)$$

oder

$$r(v)^2 = \frac{(c-v)\cdot(c+v)}{c^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

und damit

$$\boldsymbol{r(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Das liefert den bekannten Faktor für die sogenannte "Zeitdilatation". Unser Ziel ist aber die korrekte Formel für den optischen Dopplereffek: Setzen wir diesen Wurzelausdruck für $r(v)$ in eine der beiden korrigierten Dopplerformeln ein erhalten wir *in beiden Fällen*

$$f_E = f_S \cdot \frac{c}{c+v} \cdot r(v) = f_S \cdot \frac{c}{c+v} \cdot \sqrt{\frac{(c-v)\cdot(c+v)}{c^2}} = f_S \cdot \sqrt{\frac{(c-v)}{(c+v)}}$$

Dabei steht $v$ für die Geschwindigkeit, mit der sich die beiden voneinander entfernen.

Das Relativitätsprinzip, also die Forderung, dass es kein ausgezeichnetes "Äthersystem" geben soll liefert mit der zusätzlichen Annahme, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals unabhängig sein soll vom Bewegungszustand des Senders, sofort die Formeln für die Zeitdilatation und den relativistischen Dopplereffekt. Die Lorentz-Transformationen werden für die Herleitung nicht benötigt.

## 2. Die relativistische Addition von parallelen Geschwindigkeiten

Aus der relativistischen Dopplerformel gewinnen wir noch die Formel für die Addition von parallelen Geschwindigkeiten.

Es bewege sich B in positiver $x_A$-Richtung von A mit der Geschwindigkeit *v* relativ zu A, und es bewege sich C in positiver $x_B$-Richtung von B mit der Geschwindigkeit *u* relativ zu B. Die beiden x-Richtungen sollen wie üblich zusammenfallen.
C sende nun Strahlung der Frequenz $f_C$ in Richtung von B und damit auch von A. Nach dem letzten Abschnitt empfängt B diese Strahlung bei einer Frequenz von

$$f_B = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \cdot f_C$$

Mit dieser Frequenz rauscht die Strahlung an B vorbei und weiter zu A, der entsprechend die Frequenz misst

$$f_A = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot f_B = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \cdot f_C$$

Für die gesuchte Geschwindigkeit $z$ von C relativ zu A gilt andererseits

$$f_A = \sqrt{\frac{c-z}{c+z}} \cdot f_C$$

Setzt man die beiden Terme für $f_A$ einander gleich so erhält man nach einigen elementaren Umformungen das Ergebnis

$$\boldsymbol{z = \frac{v+u}{1+\frac{v \cdot u}{c^2}}}$$

Sind $v$ und $u$ klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit $c$ so unterscheidet sich das Ergebnis praktisch nicht von der Geschwindigkeitsaddition nach Newton und Galilei.
Setzt man für eine oder auch für beide der Geschwindigkeiten $u$ und $v$ die Lichtgeschwindigkeit $c$ ein so liefert die Formel wieder diese Lichtgeschwindigkeit $c$. Die Rechnung zeigt somit auch, dass die getroffenen Annahmen nicht in sich widersprüchlich sind.