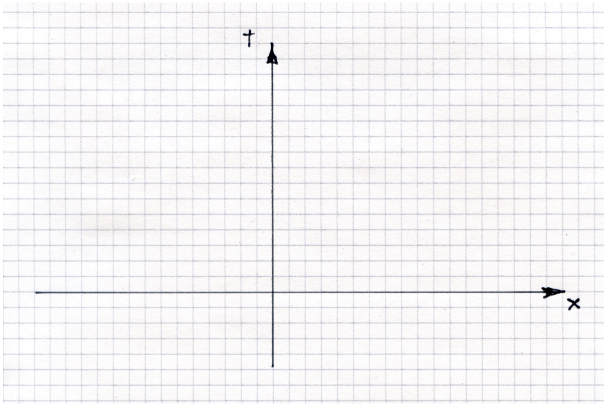
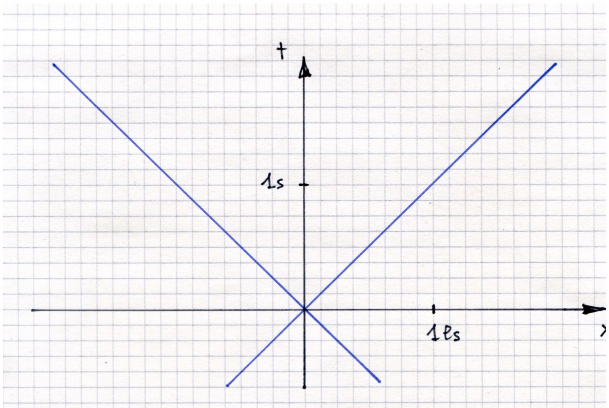
1. Raum-Zeit-Diagramme nach Ernesto Palumbo Loedel

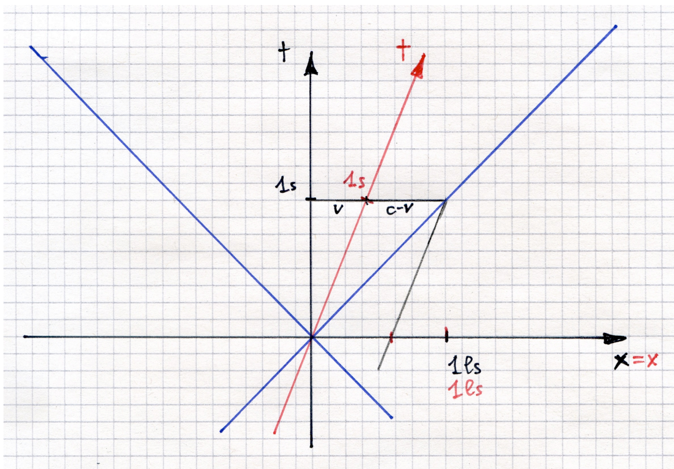
Wir starten mit einem Diagramm, in welchem Ereignisse auf einer räumlichen x-Koordinate mit ihrem Zeitpunkt eingetragen werden können. Dass die Zeitachse und die Raumachse senkrecht aufeinander stehen hat keine besondere Bedeutung. Wir nennen dieses Diagramm das Bezugssystem von "Schwarz"



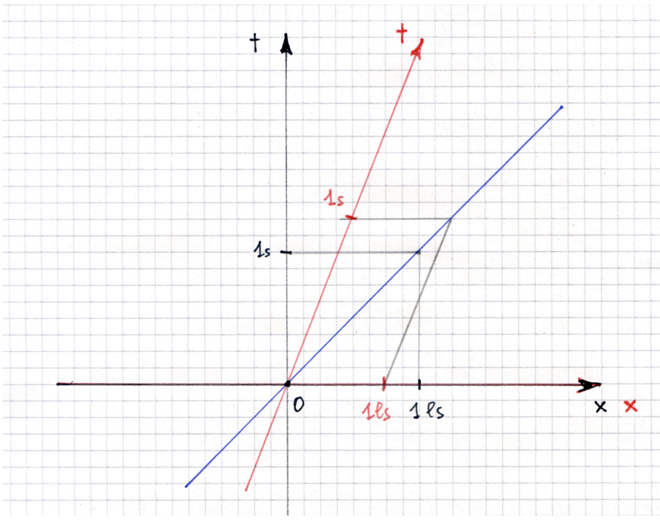
Damit wir die "Weltlinie" eines Lichtpulses einzeichnen können, den wir vom Koordinatenursprung O in die positive oder negative x-Richtung losschicken, müssen wir zuerst noch Einheiten auf den beiden Achsen festlegen. Wir wählen "Sekunden" für die Zeitachse und gleich lange "Lichtsekunden" für die Streckenlängen. Damit bewegt sich Licht immer parallel zu den Hauptdiagonalen des Diagramms:



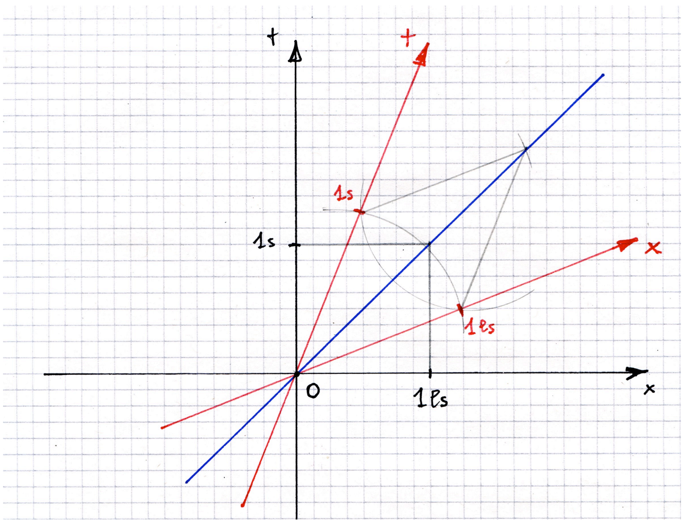
Nun nehmen wir noch den Beobachter "Rot" hinzu, der sich für Schwarz mit *v* in positiver x-Richtung bewegen soll. Nach Newton und Galilei bewegt sich das von Schwarz ausgesandte Licht für Rot mit der Geschwindigkeit *c - v* :



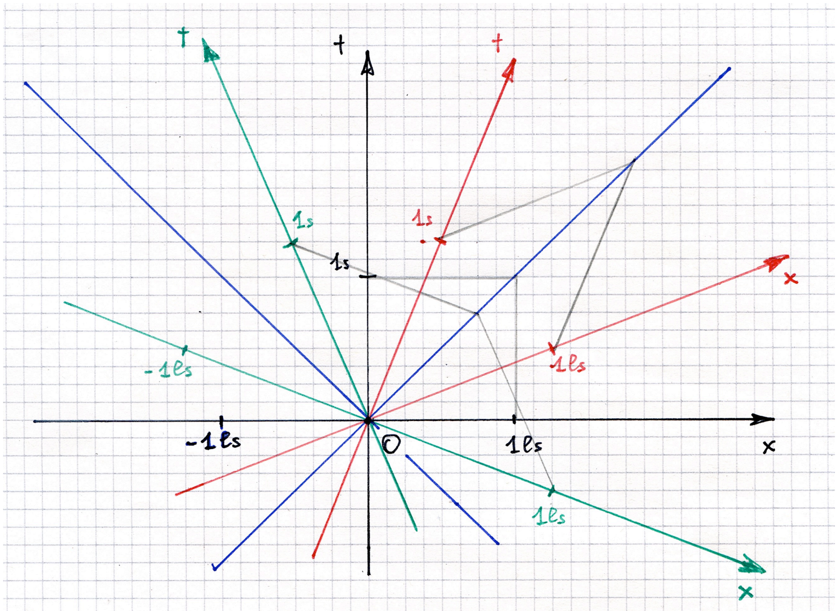
Jetzt wollen wir erreichen, **dass sich das Licht in allen Bezugssystemen mit derselben Geschwindigkeit c fortpflanzen soll, unabhängig vom Bewegungszustand des Senders**. Das ist hier eine **axiomatische Annahme**. Dafür **müssen** wir die Skaleneinheiten von Rot verändern, wir müssen uns von Newtons Absoluter Zeit und seinem Absoluten Raum verabschieden! Ein erster Versuch könnte so aussehen:



Das ist völlig richtig, und damit könnte man vielleicht auch arbeiten. Eleganter wird die Darstellung, wenn auch für Rot die Sekunde und die Lichtsekunde gleich lange Skaleneinheiten erhalten. Das ist aber nur möglich, wenn die rote x-Achse abgekippt wird. Wir erinnern daran, dass der Winkel zwischen der Zeit- und Raumachse in einem Bezugssystem keine Bedeutung hat, er ist völlig willkürlich. Proijziert wird in jedem Fall parallel zu den Koordinatenachsen. In dieser zweiten Darstellung führen Punkte auf dem Lichtpfad bei der Projektion auf die Achsen in beiden Systemen zu einem Rhombus:

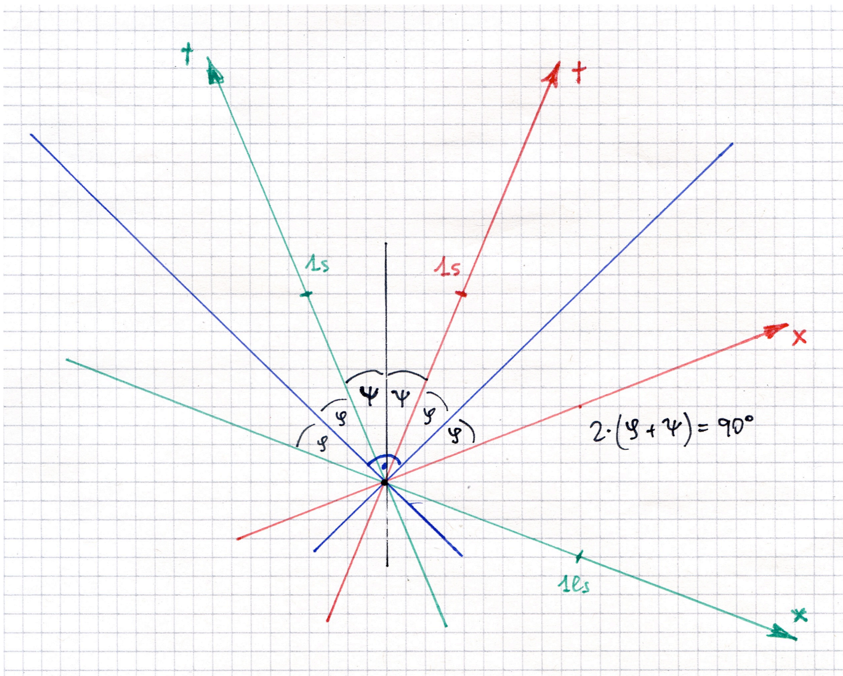


Es ist das Ziel des nächsten Abschnittes herauszufinden, wie sich die Längen der schwarzen und der roten Einheitsstrecken zueinander verhalten oder wie unterschiedlich schnell die Schwarze und die Rote Zeit läuft. Dazu machen wir das Raum-Zeit-Diagramm zuerst noch ein bisschen komplizierter, um es anschliessend wieder zu vereinfachen: Wir zeichnen jetzt **zwei** Beobachter ("Rot" und "Grün") ein, die sich mit den Geschwindigkeiten *+v* respektive *-v* relativ zu Schwarz in unserem Diagramm bewegen. Für Rot und Grün mag eine andere Zeit verstrichen sein, wenn für Schwarz eine Sekunde vergangen ist - wichtig ist aber, dass das verstrichene Zeitintervall für Rot und Grün aus Symmetriegründen dasselbe ist (Isotropie des Raumes) !!



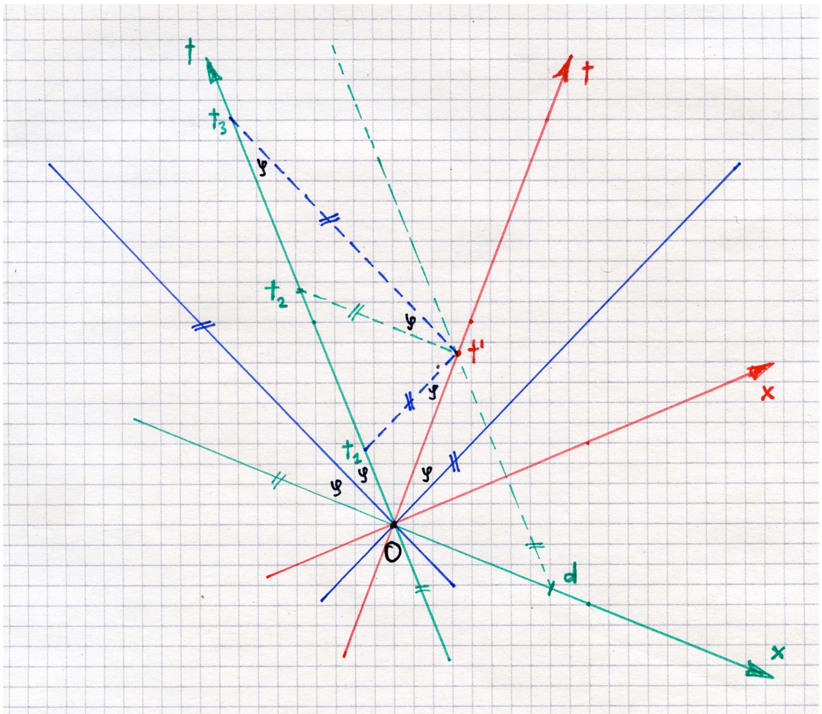
In allen drei Bezugssystemen bewegt sich das Licht in beiden Richtungen parallel zu den Winkelhalbierenden der Achsen (egal von wem es ausgesendet wird), und es hat in allen drei Bezugssystemen die Geschwindigkeit 1ls/1s = 1l = c .

Für die folgenden Betrachtungen lassen wir das Schwarze Bezugssystem weg. Auch die Rote Raumachse könnten wir noch weglassen, wir brauchen sie nicht. Wichtig ist aber, dass die Rote und die Grüne Zeitachse gleich skaliert sind ! Dieser **symmetrische** Diagrammtyp für zwei Bezugssysteme heisst "Loedel-Diagramm" nach Ernesto Palumbo Loedel, der ihn 1948 in den "Anales de la Sociedad Cientifica Argentina" vorgestellt hat. Wir heben noch hervor, dass in der Figur nur zwei verschiedene Winkel auftreten: Die Winkel ψ sind gleich weil die Geschwindigkeiten von Rot und Grün für Schwarz dieselben sind, es gilt ja $|v| = \tan(\psi)$. Die Winkel φ sind gleich weil sich das Licht parallel zu den Winkelhalbierenden bewegen muss und weil die beiden Winkelhalbierenden senkrecht stehen aufeinander.



2. Die Zeit-Dilatation

Wir betrachten nun ein Experiment im System von Grün: Am Ort d ist ein Spiegel fix aufgestellt, seine gestrichelt gezeichnete Weltlinie ist somit parallel zur grünen Zeitachse. Zum Zeitpunkt t_1 sendet Grün von O aus einen Lichtstrahl zu diesem Spiegel. Dieser kommt zum Zeitpunkt t_2 respektive t' dort an und wird refektiert. Der reflektierte Strahl erreicht den Ausgangsort zum Zeitpunkt t_3. Die Zeiten t_1 und t_3 werden von Grün mit derselben, in O ruhenden Uhr gemessen. Den Zeitpunkt t_2 , zu welchem der Lichtstrahl reflektiert worden ist, kann sich Grün leicht ausrechnen: $t_2 = (t_1 + t_3)/2$. Das kann mit der Isotropie des Raumes begründet werden (gleiche Zeit für den Hin- und den Rückweg) oder auch geometrisch aus dem Diagramm (t_2-t'-t_3 ist ein gleichschenkliges Dreieck im rechtwinkligen Dreieck t_1-t'-t_3 . t_2 ist also nach dem Satz von Thales der Mittelpunkt des Umkreises vom Dreieck t_1-t'-t_3).



Jetzt kommt Rot ins Spiel. Rot und Grün haben sich in O getroffen, und dabei haben beide ihre Uhren auf null gestellt. Der Zeitpunkt t_1 wird nun so gewählt, dass Rot sich genau in d befindet wenn dort der Lichtstrahl reflektiert wird (wie man das technisch machen kann soll weiter unten diskutiert werden). Für Rot sind die Reflexion des Lichtstrahls und der Vorbeiflug des Spiegels gleichzeitige Ereignisse, die zum Zeitpunkt t' stattfinden, für Grün findet die Reflexion zum Zeitpunkt t_2 statt. Wichtig ist jetzt dass die Skaleneinheiten auf beiden Achsen dieselbe Länge haben! Für Rot vergeht also weniger Zeit zwischen der Begegnung mit Grün in O und dem Ereignis der Reflexion als für Grün. "Schnelle Uhren gehen langsamer", Newton's Absolute Zeit ist nicht länger haltbar.

Aber auch quantitativ kann man den Faktor der sogenannten Zeitdilatation aus diesem Diagramm leicht berechnen. Die Idee stammt von Bondi, aber erst in der Darstellung mit einem Loedel-Diagramm stimmt alles auch geometrisch. Im Minkowski-Diagramm ist die Darstellung ziemlich gequält (siehe zB N.M.J.Woodhouse, "Special Relativity", p.66).

Das Dreieck O-t_1-t' ist ähnlich zum Dreieck O-t'-t_3 (beide haben den Winkel bei O und den Winkel φ gemeinsam).
Somit ist $t' = k \cdot t_1$ und $t_3 = k \cdot t'$, somit $t_3 = k^2 \cdot t_1$
Nun berechnen wir zuerst den Zusammenhang zwischen dem Faktor k und der Relativgeschwindigkeit v der beiden Bezugssysteme:

$$v = \frac{d}{t_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (t_3 - t_1) \cdot c}{\frac{1}{2} \cdot (t_3 + t_1)} = \frac{(k^2 \cdot t_1 - t_1)}{(k^2 \cdot t_1 + t_1)} \cdot c = \frac{(k^2 - 1)}{(k^2 + 1)} \cdot c$$

Löst man diese Gleichung für v, k und c nach k auf so erhält man

$$k = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

Das ist Bondi's k-Faktor (Herrmann Bondi: "Relativity and Common Sense", Doubleday & Company, New York 1964).

Damit können wir nun die Beziehung zwischen t_2 und t' bestimmen:

Es ist $t' = k \cdot t_1$ und $t_2 = (t_1 + k^2 \cdot t_1)/2$. Daraus erhalten wir für das Verhältnis von t' zu t_2

$$\frac{t'}{t_2} = \frac{k \cdot t_1}{(t_1 + k^2 \cdot t_1)/2} = \frac{2 \cdot k}{1 + k^2} = \ldots . = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Also

$$\boldsymbol{\Delta t} = \boldsymbol{\Delta t} \cdot \sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}}$$

Wie kann man technisch erreichen, dass Rot genau dann beim Spiegel vorbeifliegt wenn der Lichtpuls dort reflektiert wird ? Eine simple Variante besteht darin, dass Grün die Relativgeschwindigkeit von Rot misst und sich daraus und aus dem Laufweg d des Lichts *ausrechnet*, wann das der Fall sein muss und t_1 entsprechend wählt: $t_1 = d/v - d/c$
Komplizierter könnte man es auch so machen, dass Grün dauernd ein Signal zum Spiegel schickt, welches (wie die GPS-Signale) einen Zeitstempel aufmoderiert hat. Fliegt Rot am Spiegel vorbei löst er dort über eine Lichtschranke eine Kerr-Zelle aus, und erst jetzt gelangt das Licht vom Spiegel zurück nach O. Grün misst dann nicht nur die erste Ankunftszeit t_3 des Lichts, sondern kann aus der Modulation des ankommenden Lichts auch bestimmen, wann dieses erste durch-gelassenen Licht ursprünglich ausgesandt worden ist, also t_1 .

3. Der relativistische Dopplereffekt

In der Akustik muss man für die Berechnung der Frequenzänderung zwei Fälle unterscheiden.

a) Der Sender ruht im Medium, der Empfänger entfernt sich mit der Geschwindigkeit v von der Quelle. Die entsprechende Formel ist dann

$$f_E = f_s \cdot \frac{c - v}{c}$$

b) Der Empfänger ruht im Medium, der Sender entfernt sich mit der Geschwindigkeit v vom Empfänger. Die Frequenzänderung folgt dann der Formel

$$f_E = f_s \cdot \frac{c}{c + v}$$

Wenn es kein ausgezeichnetes Bezugssystem mehr gibt, die Lichtgeschwindigkeit überall denselben Wert haben soll und nur noch eine Relativgeschwindigkeit gemessen werden kann müssen diese beiden Formeln zusammenfallen! Das tun sie tatsächlich auch, wenn wir die Zeitdilatation aus dem zweiten Abschnitt berücksichtigen:

Im Fall a) bewegt sich der Empfänger, seine Uhr tickt also um den Faktor $r = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer. Er wird entsprechend eine grössere Frequenz messen, in seinen langen Sekunden treffen mehr Schwingungen ein. Die Formel von a) müssen wir korrigieren zu

$$f_E = f_s \cdot \frac{c - v}{c} \cdot \frac{1}{r}$$

Im Fall b) ruht der Empfänger, die Uhr des schnellen Senders tickt verlangsamt. Dadurch sinkt aus der Sicht des Empfängers seine Sendefrequenz, und wir müssen die Formel von b) korrigieren zu

$$f_E = f_s \cdot \frac{c}{c + v} \cdot r$$

Setzt man für r den Wurzelterm ein führen tatsächlich beide Fälle nach wenigen Umformungen zu demselben Resultat

$$\boldsymbol{f_E = f_s \cdot \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}}$$

Das ist die optische (longitudinale) Dopplerformel, die für die Ausbreitung aller elektromagnetischer Wellen gilt. Der Äther ist obsolet, es kommt nur noch auf die Relativgeschwindigkeiten von Sender und Empfänger an.

Es ist auch der umgekehrte Weg gangbar: Man *verlangt* dass beide Formeln zu demselben Ergebnis führen sollen und berechnet daraus den Faktor r der Zeitdilatation. Auch in diesem Fall verlangt man, dass sich die Strahlung des schnellen Senders sich mit der Lichtgeschwindigkeit des Ruhesystems des Empfängers ausbreitet, also dass die Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustand des Empfängers unabhängig ist. Dieser Weg wird in der "Miniatur 01" beschritten.

4. Die relativistische Addition von parallelen Geschwindigkeiten

Aus der relativistischen Dopplerformel gewinnen wir noch die Formel für die Addition von parallelen Geschwindigkeiten. Diese Rechnung findet man auch im Buch "It's About Time" von N. David Mermin, Princeton University Press 2005.

Es bewege sich B in positiver x-Richtung von A mit der Geschwindigkeit v relativ zu A, und es bewege sich C in positiver x-Richtung von B mit der Geschwindigkeit u relativ zu B. Die beiden x-Richtungen sollen wie üblich zusammenfallen.
C sende nun Strahlung der Frequenz f_C in Richtung von B und damit auch von A. Nach dem letzten Abschnitt empfängt B diese Strahlung bei einer Frequenz von

$$f_B = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \cdot f_C$$

Mit dieser Frequenz rauscht die Strahlung an B vorbei und weiter zu A, der entsprechend die Frequenz misst

$$f_A = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot f_B = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot \sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \cdot f_C$$

Für die gesuchte Geschwindigkeit z von C relativ zu A gilt andererseits

$$f_A = \sqrt{\frac{c-z}{c+z}} \cdot f_C$$

Setzt man die beiden Terme für f_A einander gleich so erhält man nach einigen elementaren Umformungen das Ergebnis

$$\boldsymbol{z = \frac{v + u}{1 + \frac{v \cdot u}{c^2}}}$$

Sind v und u klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c so unterscheidet sich das Ergebnis praktisch nicht von der Geschwindigkeitsaddition nach Newton und Galilei. Setzt man für eine oder auch für beide der Geschwindigkeiten u und v die Lichtgeschwindigkeit c ein so liefert die Formel wieder diese Lichtgeschwindigkeit c. Die Rechnung zeigt somit auch, dass die getroffenen Annahmen nicht schon in sich widersprüchlich sind.