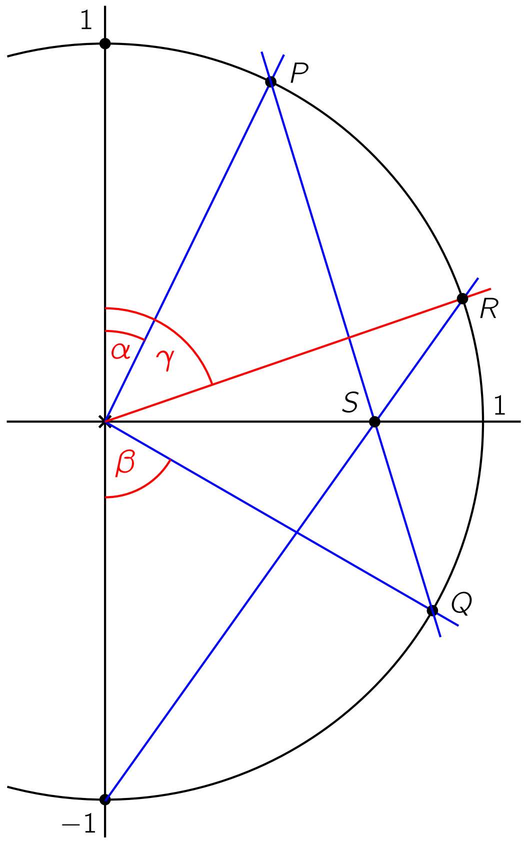
Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal – zur Addition von Geschwindigkeiten

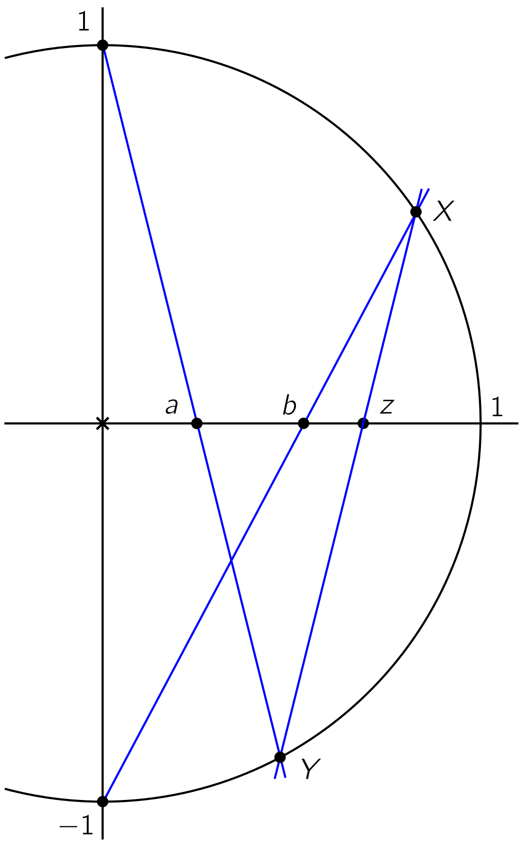


Version 1.01, vom 9. Dezember 2013

Alfred Hepp, Bergün und Martin Gubler, Frauenfeld

1 Die Konstruktion von $a \oplus b$ nach Jerzy Kocik

In der Zeitschrift Am. J. Phys., Vol. 80, No. 8 vom August 2012 stellt Jerzy Kocik ab p. 737 die folgende Konstruktion vor:



Die Geschwindigkeiten

$$a = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad b = \frac{u}{c}$$

seien als einheitenlose Zahlen aus dem Intervall [-1, 1] gegeben:

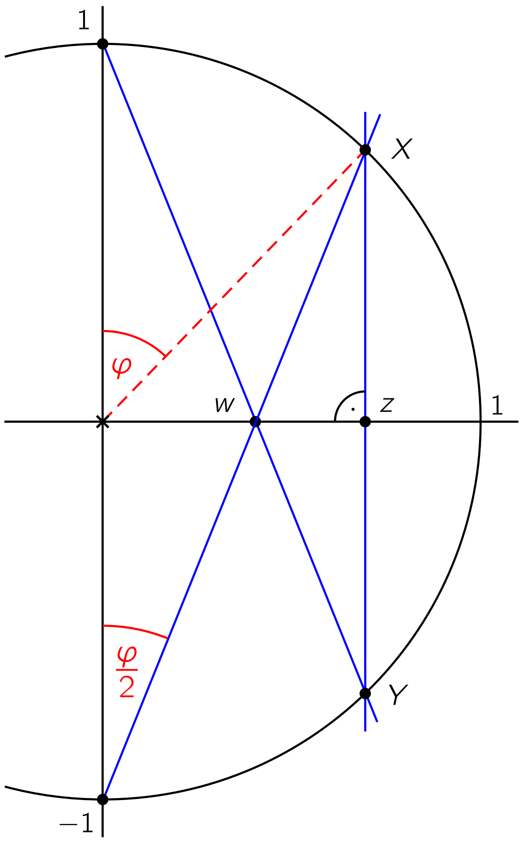
- trage a und b auf der x-Achse ab
- die Sehne durch $(0/1)$ und $(a/0)$ liefert Y
- die Sehne durch $(0/\text{-}1)$ und $(b/0)$ liefert X
- die Sehne durch X und Y liefert den Punkt $(z/0)$

Es gilt: $\quad z = a \oplus b = \dfrac{a+b}{1+a \cdot b}$

Aufgaben:

1. Konstruieren Sie $0.5 \oplus 0.6$.
2. Konstruieren Sie $a \oplus 1, \;\; 1 \oplus 1, \;\; a \oplus (-1), \;\; a \oplus (-a)$.
3. Berechnen Sie allgemein die Koordinaten von X und Y.
4. Berechnen Sie den Wert von z aus den Koordinaten von X und Y und beweisen Sie damit die Korrektheit der Konstruktion.

2 Eine Folgerung für die „halbe Geschwindigkeit“



Es sei $z \in]\text{-}1, 1[$ gegeben.

- das Lot in z zur x-Achse liefert die Punkte X und Y
- die Sehnen von X nach (0/-1) und von Y nach (0/1) schneiden einander auf der x-Achse in w
- nach **1** gilt: $w \oplus w = z$

w ist also die „halbe Geschwindigkeit“ von z gemäss SRT.

Es gilt: $$w = \frac{z}{1 + \sqrt{1 - z^2}} \qquad (1)$$

Für den *Zentriwinkel* φ gilt: $\sin(\varphi) = z$. φ ist somit der Epstein-Winkel zur Geschwindigkeit z.

Für den *Peripheriewinkel* $\frac{\varphi}{2}$ bei (0/-1) gilt: $\tan(\frac{\varphi}{2}) = w$.

Aufgaben:

1. Addieren Sie mit Zirkel und Lineal: $0.5 \oplus 0.5$.
2. Bestimmen Sie die „halbe Geschwindigkeit“ zu $0.9 \cdot c$ mit Zirkel und Lineal.
3. Zeigen Sie algebraisch, dass für w nach (1) gilt: $w \oplus w = z$.
4. Aus obiger Figur ist ersichtlich: $z = \sin(\varphi)$ und $w = \tan(\frac{\varphi}{2})$. Zeigen Sie mithilfe von goniometrischen Umformungen, dass gilt: $\tan(\frac{\varphi}{2}) \oplus \tan(\frac{\varphi}{2}) = \sin(\varphi)$.
5. Leiten Sie (1) aus der Tatsache ab, dass im rechtwinkligen Dreieck X, (0/0) und (z/0) gilt:
$$\frac{z - w}{\sqrt{1 - z^2}} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = w$$
6. Der Punkt (w/0) liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels bei X im Dreieck (0/0), (z/0), X! Welche Verhältnisgleichung ergibt sich daraus?

3 Die Addition $\oplus$ stiftet eine Abel'sche Gruppe

Die „Hosenknopf"-Addition

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1+a \cdot b}$$

macht aus dem offenen Intervall $]\,\text{-}1, 1\,[$ eine Abel'sche Gruppe.

i) die Operation ist offensichtlich kommutativ

ii) die Zahl 0 ist das Neutralelement

iii) $-a$ ist die Gegenzahl zu a mit $a \oplus (-a) = 0$

iv) die Operation ist assoziativ (Aufgabe 1)

Daraus gewinnen wir das folgene
Lemma: Es sei $p \oplus p = a$, $q \oplus q = b$ und $w \oplus w = z$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $a \oplus b = z$

ii) $p \oplus q = w$

Die „halbe Geschwindigkeit" der Summe ist also die Summe der „halben Geschwindigkeiten"!

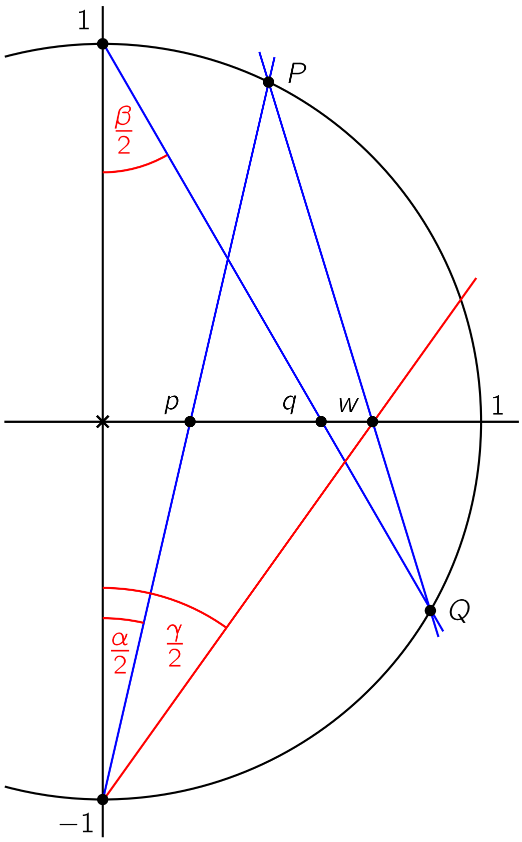
Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass die Addition $\oplus$ assoziativ ist.

2. Beweisen Sie das Lemma.

3. Warum ist es wichtig, die Zahlen 1 und -1 auszuschliessen? Wir haben doch in Abschnitt **1** auch $a \oplus 1$ und $a \oplus (-1)$ konstruiert!

4 Die Addition von Epstein-Winkeln nach Hepp



Die Geschwindigkeiten a und b seien durch ihre Epstein-Winkel α und β gegeben, also $a = \sin(\alpha)$ und $b = \sin(\beta)$.

- trage $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ als Peripheriewinkel bei (0/-1) und (0/1) ab. Man erhält P, Q sowie p und q
- schneide die Sehne PQ mit der x-Achse. Man erhält w und $\frac{\gamma}{2}$

γ ist der Epstein-Winkel zu $a \oplus b$

Begründung:

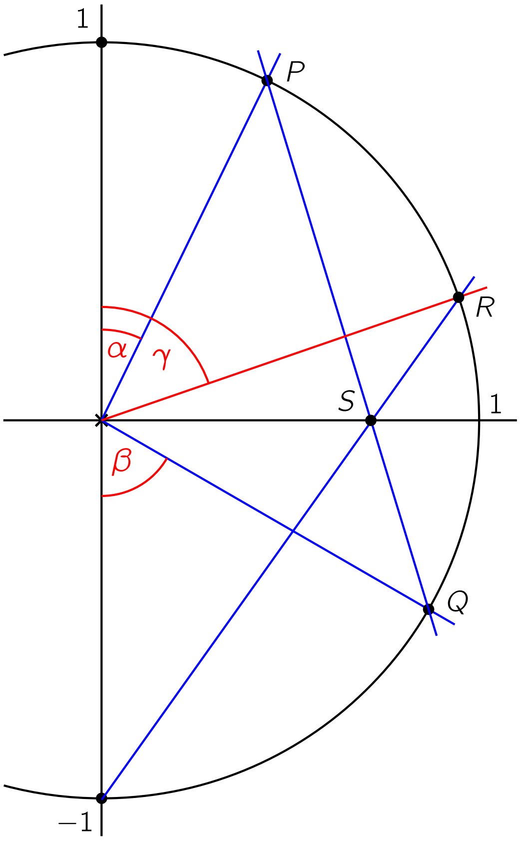
- nach **2** gilt $p \oplus p = a$ und $q \oplus q = b$
- nach **1** gilt $w = p \oplus q$
- nach **3** ist $w \oplus w = a \oplus b$
- nach **2** ist somit $\frac{\gamma}{2}$ der halbe Epstein-Winkel zu $w \oplus w = a \oplus b$

Es ist allgemein $P = (a/\sqrt{1-a^2}\,)$ und $Q = (b/-\sqrt{1-b^2}\,)$. Schneidet man die Gerade durch P und Q mit der x-Achse, so erhält man einen Term für w. Mit einer aufwendigen Rechnung lässt sich **direkt** zeigen, dass gilt $w \oplus w = a \oplus b$.

Falls Sie mit Epsteinwinkeln nicht vertraut sind, lesen Sie im Netz das Kapitel C des Buches „Epstein erklärt Einstein“ von David Eckstein (http://www.relativity.li/de/epstein/lesen/c0_de).

5 Die Addition von Epstein-Winkeln nach Hepp und Gubler

Verwendet man Zentriwinkel anstelle der Peripheriewinkel, so kann man den Umweg über die halben Winkel vermeiden:



Die Geschwindigkeiten a und b seien wieder durch die Epstein-Winkel α und β gegeben mit $a = \sin(\alpha)$ und $b = \sin(\beta)$.

- trage α und β als Zentriwinkel an die y-Achse an $\longrightarrow$ P und Q
- die Sehne durch P und Q liefert S
- die Sehne durch (0/-1) und S liefert R und den Winkel γ

γ ist der Epstein-Winkel zu $a \oplus b$

Begründung:

P und Q liegen am selben Ort wie bei der Konstruktion nach **4**. Es ist $S = (w/0)$, und nach **2** ist die x-Koordinate von R gleich $w \oplus w = a \oplus b$.

6 Die Epstein-Gruppe für spitze Winkel

Die „Hosenknopf“-Addition $\oplus$ auf dem offenen Intervall $]-1, 1[$ lässt sich leicht auf die Menge der spitzen Winkel im Intervall $]-90°, 90°[$ übertragen. Die Abbildung

$$\varphi \longmapsto \sin(\varphi)$$

stiftet eine Bijektion, und wir definieren für die Winkel

$$\alpha \oplus \beta := \sin^{-1}\left(\sin(\alpha) \oplus \sin(\beta)\right)$$

neu, für Winkel   wie bisher, für Geschwindigkeiten $\frac{v}{c}$

Die beiden Gruppen sind isomorph, wir haben damit also nichts Neues geschaffen. Schön ist aber, dass wir die Addition $\oplus$ für Winkel nach **5** direkt mit Zirkel und Lineal ausführen können.