

Relativitätstheorie mit Vierervektoren

Es wird vorausgesetzt, dass der Leser, die Leserin mit der speziellen Relativitätstheorie bereits vertraut ist etwa im Umfang der Darstellung in [https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Relativ/Ein neuer Pfad.pdf](https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Relativ/Ein%20neuer%20Pfad.pdf). Auf diese Arbeit wird auch hin und wieder Bezug genommen. So meint [1 - 21.3] die Formel 21.3 und [1 - 3] den Abschnitt 3 von dieser Abhandlung.

Hier geht es darum, den Formalismus der Vierervektoren einzuführen und anhand von Beispielen zu zeigen, wie effizient damit Probleme der SRT bearbeitet werden können. Wichtige Quellen waren für mich dabei

- [1] "Ein neuer Pfad", Martin Gubler, Januar 2021 (Link siehe oben)
- [2] "Relativitätstheorie für Studienanfänger", Jürgen Freund, vdf ETH Zürich 2005²
- [3] "Raum Zeit Relativität", Roman Sexl und Herbert K. Schmidt, vieweg studium 36, 1993³

Version 1.03 , 24. Februar 2021
Martin Gubler alias David Eckstein
gub@stafag.ch

www.relativity.li
www.physastromath.ch

Inhaltsverzeichnis

A Die Theorie: Definition und Eigenschaften von Vierervektoren

- A1 Der Viererort X
- A2 Linearkombinationen von Vierervektoren
- A3 Die Ableitung nach der Eigenzeit und die Vierergeschwindigkeit U
- A4 Der Viererimpuls P
- A5 Der Viererstrom J
- A6 Die Viererkraft K
- A7 Die Viererbeschleunigung A
- A8 Ein spezielles Skalarprodukt für Vierervektoren
- A9 Vierer-Linearformen und das Skalarprodukt
- A10 Einige weitere ausgewählte Skalarprodukte von Vierervektoren
- A11 Der Viererimpuls als Erhaltungsgrösse

B Die Praxis: Beispiele zum Rechnen mit Vierervektoren

- B12 Eine theoretische Anwendung
- B13 Der Viererimpuls von Photonen
- B14 Was misst der schnelle Beobachter ?
- B15 Paarvernichtung 1
- B16 Paarvernichtung 2
- B17 Paarvernichtung 3
- B18 Paarvernichtung 4
- B19 Paarerzeugung
- B20 Der vollkommen inelastische Stoss
- B21 Der vollkommen elastische Stoss 1
- B22 Der vollkommen elastische Stoss 2
- B23 Die Compton-Streuformel
- B24 Der inverse Compton-Effekt
- B25 Bremsstrahlung

C Lorentz-Kraft und elektromagnetisches Feld

- C26 Die Lorentz-Kraft als Vierervektor
- C27 Die Transformation der Feldvektoren
- C28 Kraft und Beschleunigung im Speicherring
- C29 Kraft und Beschleunigung beim Linearbeschleuniger
- C30 Der stromführende Leiter 1
- C31 Der stromführende Leiter 2
- C32 Der stromführende Leiter 3
- C33 Die Leiterschleife im Magnetfeld
- C34 Die erste Invariante des elektromagnetischen Feldes
- C35 Die zweite Invariante des elektromagnetischen Feldes
- C36 Welche Felder lassen sich ganz wegtransformieren ?
- C37 Der Nabla-Operator als Viererform
- C38 Die Gleichungen von Maxwell für das Vakuum
- C39 Maxwells Gleichungen sind forminvariant
- C40 Kosmetik am elektromagnetischen Feld

A1 Der Viererort X

Die Lorentz-Transformationen beschreiben, wie man die Koordinaten (t, x, y, z) , die man in einem Bezugssystem S einem Ereignis zuordnet, in die Koordinaten (t', x', y', z') umrechnet, welche im Bezugssystem S' zu demselben Ereignis gehören. Sie sind durch die folgenden Gleichungen gegeben [1 - 20.5] :

$$\begin{aligned} t &= \gamma_v \cdot \left(t' + \beta_v \cdot \frac{x'}{c} \right) & t' &= \gamma_v \cdot \left(t - \beta_v \cdot \frac{x}{c} \right) \\ x &= \gamma_v \cdot (x' + \beta_v \cdot c \cdot t') & x' &= \gamma_v \cdot (x - \beta_v \cdot c \cdot t) \\ y &= y' & y' &= y \\ z &= z' & z' &= z \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\gamma \text{ und } \beta \text{ sind dabei die bekannten Abkürzungen } \gamma = \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ und } \beta = \beta_v = \frac{v}{c} . \quad (1.2)$$

Die beiden Bezugssysteme (oder Koordinatensysteme) sind dabei immer speziell ausgerichtet: Die beiden x-Achsen liegen aufeinander, die beiden y- und die beiden z-Achsen sind stets parallel zueinander, und die Geschwindigkeit von S' aus der Sicht von S hat nur eine x-Komponente : $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Zudem wurden bei der Begegnung der beiden Koordinaten-Nullpunkte die dortigen Mutteruhren in beiden Bezugssystemen auf null gestellt; anschliessend wurden alle anderen Uhren im jeweiligen Bezugssystem mit ihrer Mutteruhr synchronisiert (siehe [1 - 20]).

Die Gleichungen (1.1) lassen sich unter Verwendung der Lorentz-Matrix L elegant zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} c \cdot t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \beta & 0 & 0 \\ -\gamma \cdot \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \cdot t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Die Zeitkomponente wird mit der Lichtgeschwindigkeit c multipliziert damit alle 4 Komponenten dieselben Einheiten haben. Die Spaltenvektoren, welche die Koordinaten eines Ereignisses zusammenfassen, heissen der *Viererort* dieses Ereignisses und werden mit X respektive X' bezeichnet. Mit diesen Namen lassen sich (1.1) und (1.3) noch kürzer schreiben:

$$X' = L \cdot X \quad (1.4)$$

Die inverse Transformation benutzt die inverse Matrix L^{-1} , die sich von L nur darin unterscheidet, dass die Minuszeichen verschwunden sind. Die Rücktransformation lässt sich so kurz schreiben als

$$X = L^{-1} \cdot X' \quad (1.5)$$

Vektoren, die sich beim Übergang vom Bezugssystem S zum Bezugssystem S' auf diese Art transformieren, nennen wir allgemein *Vierervektoren*.

Den Viererort oder die Viererposition X schreiben wir auch mit $X = (c \cdot t, \vec{x})$. Der Term $c \cdot t$ ist die zeitliche Komponente, der 3d-Vektor \vec{x} die räumliche Komponente des Vierervektors. Ein Vierervektor ist immer als Matrix mit einer Spalte und vier Zeilen aufzufassen.

A2 Linearkombinationen von Vierervektoren

Wegen der Linearität der Abbildung durch Multiplikation mit der Matrix L ist mit den Vierervektoren X und Y auch jeder Vektor

$$m \cdot X + n \cdot Y$$

ein Vierervektor, wenn m und n Konstanten sind, die in allen Inertialsystemen denselben Wert haben.

Damit ist auch der Vektor $\Delta X = X(t_2) - X(t_1) = (c \cdot \Delta t, \Delta \vec{x})$ als Differenz von Vierervektoren ein Vierervektor.

Mit den relativistischen Invarianten m_0 und ϱ_0 werden wir so aus der Vierergeschwindigkeit U den Viererimpuls $P = m_0 \cdot U$ und den Ladungs-Stromdichte-Vektor $J = \varrho_0 \cdot U$ gewinnen. In [C32](#) wird gezeigt, wie sich der gesamte Viererstrom in einem stromführenden Draht als Summe von zwei elementarerer Viererströmen denken lässt.

A3 Die Ableitung nach der Eigenzeit τ und die Vierergeschwindigkeit U

Wenn wir den Vierer-Ortsvektor $X = (c \cdot t, \vec{x})$ nach der Zeit t ableiten erhalten wir den Vektor (c, \vec{u}) , wo \vec{u} die Geschwindigkeit beschreibt, mit der sich eine Position \vec{x} im System S ändert (der Variablenname v bleibt reserviert für die Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme). Wir erhalten damit aber *keinen* Vierervektor, schon die erste Komponente transformiert sich nicht wie verlangt. Im Allgemeinen gilt nämlich

$$\gamma \cdot c - \gamma \cdot \beta \cdot u_x \neq c$$

wie man zum Beispiel durch Einsetzen von $\vec{u} = (0, c/2, c/2)$ sofort sieht.

Man kann auch nicht erwarten, dass die Ableitung nach der Zeit t in einem beliebigen Koordinatensystem einen Vierervektor liefert, da ja die Zeit in jedem Bezugssystem mit einer anderen Geschwindigkeit abläuft. Es gibt aber ein Bezugssystem, welches in dieser Hinsicht ausgezeichnet ist: Es ist dasjenige, in welchem das bewegte Objekt momentan gerade ruht, das sogenannte *Eigensystem* des bewegten Objekts (Englisch: The comoving inertial frame). Für alle Bezugssysteme gilt

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta \tau^2 - 0 - 0 - 0 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad (3.1)$$

Das Eigenzeit-Intervall $\Delta \tau$ ist damit eine relativistische Invariante. Damit ist nach A2 der Vektor $\frac{1}{\Delta \tau} \cdot \Delta X$ ebenfalls ein Vierervektor, und zwar für jedes noch so kleine Zeitintervall $\Delta \tau$. Das gilt demnach auch im Limes für $\Delta \tau \rightarrow 0$, also für die Ableitung des Viererortes nach der Eigenzeit. Wir definieren daher die Vierergeschwindigkeit U durch

$$U = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta \tau} = \frac{d}{d\tau}(X) \quad (3.2)$$

Nun gilt für jedes Koordinatensystem S, dass alle anderen Zeiten langsamer laufen als die eigene. (3.1) zeigt deutlich, dass Δt grösser ist als $\Delta \tau$. Es ist also

$$\Delta \tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \Delta t / \gamma_u \quad \text{und daher} \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \quad (3.3)$$

Mit der Kettenregel lässt sich damit die Ableitung nach der Eigenzeit τ gut berechnen:

$$U = \frac{d}{d\tau}(X) = \frac{d}{dt}(X) \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \cdot \frac{d}{dt}(X) = \gamma_u \cdot \frac{d}{dt}(c \cdot t, \vec{x}) = \gamma_u \cdot (c, \vec{u}) \quad (3.4)$$

$U = \gamma_u \cdot (c, \vec{u})$ ist also die gesuchte Vierergeschwindigkeit. Zudem haben wir gesehen, dass die Ableitung eines Vierervektors nach der Eigenzeit τ ganz allgemein wieder einen Vierervektor liefert, und wir haben weiter gelernt, wie wir diese Ableitung bilden können.

Es muss noch betont werden, dass die Vierergeschwindigkeit eine technische Hilfsgrösse ist. Sie hat keine Entsprechung in der physikalischen Realität in dem Sinne, dass sie gemessen werden könnte. Gemessen werden weiterhin nur 3d-Geschwindigkeitsvektoren.

$$\text{Die Eigengeschwindigkeit eines Objektes ist immer } U = \gamma_0 \cdot (c, \vec{0}) = 1 \cdot (c, \vec{0}) = (c, 0, 0, 0)^T. \quad (3.5)$$

Der hochgestellte Buchstabe T steht dabei für die *Transposition* des Zeilenvektors in einen Spaltenvektor.

A4 Der Viererimpuls P

Wenn wir den Vierervektor der Geschwindigkeit mit der invarianten Ruhemasse m_0 multiplizieren erhalten wir nach **A2** wieder einen Vierervektor. In diesem Fall ist das der Viererimpuls

$$P = m_0 \cdot U = m_0 \cdot \gamma_u \cdot (c, \vec{u}) = \left(\frac{1}{c} \cdot E_{tot}, \vec{p} \right) \quad (4.1)$$

Der Dreiervektor \vec{p} ist hier schon der nach SRT korrigierte Impulsvektor $\vec{p} = \gamma_u \cdot m_0 \cdot \vec{u}$, und wir haben zudem die Beziehung $E_{tot} = \gamma_u \cdot m_0 \cdot c^2$ verwendet.

A5 Der Viererstrom J

Wenn man die Vierergeschwindigkeit U mit der im Ruhesystem der Ladungen gemessenen Ladungsdichte ρ_0 multipliziert erhält man den Vierervektor der Ladungs- und Stromdichte oder kürzer den Viererstrom

$$J = \rho_0 \cdot U = \rho_0 \cdot \gamma_u \cdot (c, \vec{u}) \quad (5.1)$$

Diese Darstellung gilt für eine 'Ladungswolke', die sich kompakt mit der Geschwindigkeit \vec{u} bewegt. In einem Draht bewegen sich aber im Laborsystem nur die Leitungselektronen, während die gesamte Ladungsdichte null ist. Es nimmt also nur die Hälfte der Ladungsträger an der Bewegung teil. Dort gilt die allgemeinere Darstellung

$$J = (\rho \cdot c, \vec{j}) \quad (5.2)$$

wo ρ die im aktuellen Bezugssystem gemessene gesamte Ladungsdichte ist (die in einem stromführenden Leiter ja null sein kann) und \vec{j} den Stromdichtevektor bezeichnet. $j_x \cdot A_x$ ist die Stromstärke I_x in der x-Richtung, wenn A_x den Leiterquerschnitt und u_x die Geschwindigkeit der Ladungsträger in der x-Richtung bezeichnen (\rightarrow C32).

A6 Die Viererkraft K

Nach **A3** ist die Ableitung eines Vierervektors nach der Eigenzeit wieder ein Vierervektor. Leiten wir den Viererimpuls nach der Eigenzeit τ ab erhalten wir die Viererkraft K :

$$K = \frac{d}{d\tau}(P) = \frac{d}{dt}(P) \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \cdot \frac{d}{dt}(P) = \gamma \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} \cdot E, \vec{p} \right) = \gamma \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) \quad (6.1)$$

Nun ist definitionsgemäss $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$, wo \vec{f} für den gewöhnlichen 3d-Kraftvektor steht. Und für die Leistung $\frac{dE}{dt}$ gilt ebenfalls definitionsgemäss

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{u} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad \text{oder} \quad dE = \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (6.2)$$

Damit können wir für die Viererkraft K schreiben

$$K = \frac{d}{d\tau}(P) = \gamma \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{u}, \vec{f} \right) \quad (6.3)$$

Mit E bezeichnen wir dabei immer die Gesamtenergie E_{tot} . Der Buchstabe F bleibt für die Matrix reserviert, mit der wir das elektromagnetische Feld beschreiben.

A7 Die Viererbeschleunigung A

Die Ableitung der Vierergeschwindigkeit nach der Eigenzeit τ liefert die Viererbeschleunigung

$$A = \frac{d}{d\tau}(U) = \frac{d}{dt}(U) \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \cdot \frac{d}{dt}(U) = \gamma \cdot \frac{d}{dt}(\gamma \cdot (c, \vec{u})) = \gamma \cdot \left(\frac{d}{dt}(\gamma) \cdot (c, \vec{u}) + \gamma \cdot \frac{d}{dt}(c, \vec{u}) \right) \quad (7.1)$$

Wir müssen also γ nach t ableiten:

$$\frac{d}{dt}(\gamma) = \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{d}{d\vec{u}} \left[\left(1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \cdot \left(-\frac{2\vec{u}}{c^2} \right) \cdot \vec{a} = \gamma^3 \cdot c^{-2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{a} \quad (7.2)$$

wo $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$ der gewöhnliche 3d-Beschleunigungsvektor ist. Damit lässt sich (7.1) fortsetzen zu

$$A = \frac{d}{d\tau}(U) = \gamma \cdot \left(\frac{d}{dt}(\gamma) \cdot (c, \vec{u}) + \gamma \cdot \frac{d}{dt}(c, \vec{u}) \right) = \gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{a} \cdot (c, \vec{u}) + \gamma^2 \cdot (0, \vec{a}) \quad (7.3)$$

Allein aufgrund der Definition gilt in der SRT die Beziehung $K = m_0 \cdot A$:

$$K = \frac{d}{d\tau}(P) = \frac{d}{d\tau}(m_0 \cdot U) = m_0 \cdot \frac{d}{d\tau}(U) = m_0 \cdot A \quad (7.4)$$

Wenn wir jetzt (6.3) mit (7.3) kombinieren erhalten wir

$$K = \gamma \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{u}, \vec{f} \right) = m_0 \cdot [\gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{a} \cdot (c, \vec{u}) + \gamma^2 \cdot (0, \vec{a})] \quad (7.5)$$

Eine genauere Betrachtung von (7.5) zeigt, dass in der SRT die Kraft \vec{f} und die Beschleunigung \vec{a} nicht mehr parallel sein müssen !

Wenn \vec{u} und \vec{a} parallel sind ist nach (7.5) auch \vec{f} parallel zu \vec{a} . Die zeitliche Komponente von (7.5) liefert uns dann

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{u} = \gamma^3 \cdot m_0 \cdot \vec{u} \cdot \vec{a}$$

und es folgt

$$\vec{f} = \gamma^3 \cdot m_0 \cdot \vec{a} \quad (7.6)$$

In diesem Fall einer linearen Beschleunigung hat man um 1905 herum noch von der 'longitudinalen Masse' $\gamma^3 \cdot m_0$ gesprochen.

Steht die Kraft \vec{f} senkrecht auf der Geschwindigkeit \vec{u} des schnellen Objektes verschwindet der erste Summand auf der rechten Seite von (7.3) und (7.5). Dann erhalten wir aus (7.5) die einfache Beziehung

$$\vec{f} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{a} \quad (7.7)$$

Den Term $\gamma \cdot m_0$ hat man deshalb früher als 'transversale Masse' bezeichnet. In diesem Fall ist die Energieänderung $\frac{dE}{dt}$ null. Das ist zum Beispiel immer der Fall wenn nur die Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen wirkt.

A8 Ein spezielles Skalarprodukt für Vierervektoren

Die Stärke der Vierervektoren liegt darin, dass für sie ein spezielles Skalarprodukt existiert, welches einen Wert liefert, der unabhängig ist davon, in welchem Bezugssystem er berechnet worden ist. Das Skalarprodukt $X \circ Y$ liefert also immer einen *invarianten* Term. Es kann deshalb in jenem Bezugssystem berechnet werden, in welchem die Rechnung besonders einfach ist!

Nun zur Definition. Es seien also X^i und Y^i zwei Vierervektoren mit den Komponenten x_0 bis x_3 sowie y_0 bis y_3 . Dann definieren wir

$$X^i \circ Y^i \equiv x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3 \quad (8.1)$$

Das Skalarprodukt ist offensichtlich kommutativ !

Wir betrachten anhand eines Viererortes und einer Vierergeschwindigkeit die Folgen dieser Definition.

Es sei also $X^i = (c \cdot t, \vec{x}) = (c \cdot t, x, y, z)^T$ ein Viererort (das hochgestellte T bedeutet die *Transponierung* der 1x4-Matrix zu einer 4x1-Matrix). Nach der Definition (8.1) gilt

$$X^i \circ X^i = (c \cdot t)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (c \cdot \tau)^2 \quad (8.2)$$

Das Ergebnis ist tatsächlich unabhängig vom Bezugssystem, in welchem es berechnet worden ist.

Dasselbe stellen wir fest, wenn wir eine beliebige Vierergeschwindigkeit $U^i = \gamma \cdot (c, \vec{u}) = \gamma \cdot (c, u_x, u_y, u_z)^T$ nehmen und das Skalarprodukt $U^i \circ U^i$ berechnen:

$$U^i \circ U^i = \gamma \cdot (c, -\vec{u})^T \cdot \gamma \cdot (c, \vec{u}) = \gamma^2 \cdot (c^2 - \vec{u}^2) = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot (c^2 - u^2) = \frac{c^2}{c^2 - u^2} \cdot (c^2 - u^2) = c^2 \quad (8.3)$$

Das Ergebnis ist hängt offensichtlich auch nicht von der Wahl des Bezugssystems ab.

Im nächsten Abschnitt führen wir zu jedem Vierervektor noch eine zugehörige Vierer-Linearform ein. Mithilfe dieser Viererformen beweisen wir dann den entscheidenden

Satz: Das Skalarprodukt $X \circ Y$ zweier Vierervektoren ist unabhängig davon, in welchem Bezugssystem es berechnet worden ist: $X \circ Y = X' \circ Y'$ (8.4)

A9 Vierer-Linearformen und das Skalarprodukt

Zu jedem Vierervektor $X^i = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ definieren wir eine zugehörige Viererform durch

$$X_i = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \quad (9.1)$$

Eine Vierer-Linearform hat also die Gestalt einer Matrix mit einer Zeile und vier Spalten, ein Vierervektor ist eine Matrix mit einer Spalte und vier Zeilen. Man beachte die jeweilige Position des Index i !

Mit diesen Viererformen können wir das Skalarprodukt vom Abschnitt A8 als gewöhnliches Produkt von Matrizen schreiben:

$$X^i \circ Y^i = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \equiv x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3 = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = X_i \cdot Y^i \quad (9.2)$$

Wegen der Symmetrie unseres Skalarproduktes gilt

$$X_i \cdot Y^i = X^i \circ Y^i = Y^i \circ X^i = Y_i \cdot X^i \quad (9.3)$$

Zur Vorbereitung des Beweises der Invarianz unseres Skalarproduktes führen wir noch die Matrix G ein :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Einfache Rechnungen zeigen, dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$G^T = G = G^{-1} \quad , \quad L^{-1} = G^{-1} \cdot L \cdot G \quad , \quad L = G^{-1} \cdot L^{-1} \cdot G \quad , \quad X_i = (G \cdot X^i)^T = (X^i)^T \cdot G \quad (9.5)$$

Nun gilt für Vierervektoren nach (1.2) oder definitionsgemäss $X^{i'} = L \cdot X^i$. Wie transformieren sich die zugehörigen Viererformen? Aus $X^{i'} = L \cdot X^i$ erhalten wir mit (9.5)

$$\begin{aligned} X_i' &= (X^{i'})^T \cdot G = (L \cdot X^i)^T \cdot G = (X^i)^T \cdot L^T \cdot G = (X^i)^T \cdot L \cdot G = \\ &= (X^i)^T \cdot (G \cdot G^{-1}) \cdot L \cdot G = [(X^i)^T \cdot G] \cdot [G^{-1} \cdot L \cdot G] = X_i \cdot L^{-1} \end{aligned}$$

Für Viererformen gilt also

$$X_i' = X_i \cdot L^{-1} \quad \text{und} \quad X_i = X_i' \cdot L \quad (9.6)$$

Damit sind wir gut vorbereitet für den Beweis der Invarianz unseres Skalarprodukts:

$$X^{i'} \circ Y^{i'} = X_i' \cdot Y^{i'} = (X_i \cdot L^{-1}) \cdot (L \cdot Y^i) = X_i \cdot (L^{-1} \cdot L) \cdot Y^i = X_i \cdot Y^i = X^i \circ Y^i \quad (9.7)$$

Damit ist der Satz (8.4) bewiesen.

A10 Einige weitere ausgewählte Skalarprodukte von Vierervektoren

Im Abschnitt A8 haben wir $U \circ U$ schon einmal berechnet. Nun benützen wir den Satz (8.4) und rechnen für eine beliebige Vierergeschwindigkeit $U = \gamma \cdot (c, \vec{u})$ mit der Eigengeschwindigkeit $U' = 1 \cdot (c, \vec{0})$

$$U \circ U = U' \circ U' = 1 \cdot (c, -\vec{0})^T \cdot 1 \cdot (c, \vec{0}) = c^2 \quad (10.1)$$

Die Rechnung wird ganz einfach, wenn man sie im Eigensystem des schnellen Teilchens durchführt ! Vergleichen Sie mit der Berechnung von $U \circ U$ im Abschnitt A8 .

Für den Impuls $P = m_0 \cdot U$ gilt mit (10.1)

$$P \circ U = (m_0 \cdot U) \circ U = m_0 \cdot (U \circ U) = m_0 \cdot c^2 = E_0 \quad (10.2)$$

und

$$P \circ P = (m_0 \cdot U) \circ (m_0 \cdot U) = m_0^2 \cdot (U \circ U) = m_0^2 \cdot c^2 \quad (10.3)$$

Für die Viererbeschleunigung $A = \frac{d}{d\tau}(U)$ und die Vierergeschwindigkeit U gilt im Eigensystem $\vec{u}' = 0$ und somit $U' = 1 \cdot (c, \vec{0})$. Nach (7.3) ist daher $A' = \gamma^2 \cdot (0, \vec{a}') = 1 \cdot (0, \vec{a}')$. Damit erhalten wir allgemein

$$A \circ U = A' \circ U' = (0, -\vec{a}')^T \cdot (c, \vec{0}) = 0 \quad (10.4)$$

Damit gilt auch für die Viererkraft

$$K \circ U = (m_0 \cdot A) \circ U = m_0 \cdot (A \circ U) = m_0 \cdot 0 = 0 \quad (10.5)$$

Für die Viererbeschleunigung A gilt nach (7.3)

$$A = \gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{a} \cdot (c, \vec{u}) + \gamma^2 \cdot (0, \vec{a})$$

Es ist also

$$\begin{aligned} A^0 &= \gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{a} \cdot c \\ A^1 &= \gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{a} \cdot u_x + \gamma^2 \cdot a_x \\ A^2 &= \gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{a} \cdot u_y + \gamma^2 \cdot a_y \\ A^3 &= \gamma^4 \cdot c^{-2} \cdot \vec{u} \cdot \vec{a} \cdot u_z + \gamma^2 \cdot a_z \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} A \circ A &= (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = \gamma^8 \cdot c^{-4} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 \cdot [c^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2] - \\ &\quad 2 \cdot \gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot [u_x \cdot a_x + u_y \cdot a_y + u_z \cdot a_z] - \gamma^4 \cdot [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2] = \\ &= \gamma^8 \cdot c^{-4} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 \cdot [c^2 - u^2] - 2 \cdot \gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^4 \cdot a^2 = \\ &= \gamma^8 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 \cdot \frac{c^2 - u^2}{c^2} - 2 \cdot \gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^4 \cdot a^2 = \\ &= \gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 - 2 \cdot \gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^4 \cdot a^2 = -\gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^4 \cdot a^2 \end{aligned}$$

Es gilt somit allgemein

$$A \circ A = -\gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^4 \cdot a^2 \quad (10.6)$$

Im Eigensystem ist $\vec{u}' = 0$ und $\gamma = 1$, dort gilt also $A' \circ A' = -a'^2 \equiv -\alpha^2$. Die *Eigenbeschleunigung* wird also mit dem Formelzeichen $\vec{\alpha}$ bezeichnet. Damit können wir (10.6) ergänzen zu

$$A \circ A = -\gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^4 \cdot a^2 = -\alpha^2 \quad (10.7)$$

Stehen \vec{u} und \vec{a} senkrecht aufeinander (zum Beispiel bei der Lorentz-Kraft) gilt nach (10.7) für die sogenannte *Zentripetal-Eigenbeschleunigung*

$$\vec{\alpha} = \gamma^2 \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad \alpha = \gamma^2 \cdot a = \gamma^2 \cdot \frac{u^2}{r} \quad (10.8)$$

Bei einer linearen Beschleunigung sind \vec{u} und \vec{a} parallel zueinander. Dann gilt nach (10.7)

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{a})^2 + \gamma^4 \cdot a^2 = \gamma^6 \cdot c^{-2} \cdot u^2 \cdot a^2 + \gamma^4 \cdot a^2 = \\ &= \gamma^4 \cdot a^2 \cdot \left(\gamma^2 \cdot \frac{u^2}{c^2} + 1 \right) = \gamma^4 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{c^2}{c^2 - u^2} \cdot \frac{u^2}{c^2} + 1 \right) = \\ &= \gamma^4 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{u^2}{c^2 - u^2} + \frac{c^2 - u^2}{c^2 - u^2} \right) = \gamma^4 \cdot a^2 \cdot \left(\frac{c^2}{c^2 - u^2} \right) = \\ &= \gamma^4 \cdot a^2 \cdot \gamma^2 = \gamma^6 \cdot a^2 \end{aligned}$$

Bei einer linearen Beschleunigung beträgt die Eigenbeschleunigung also

$$\vec{\alpha} = \gamma^3 \cdot \vec{a} \quad (10.9)$$

Nur bei der linearen Beschleunigung gilt damit die Beziehung

$$\vec{f} = \gamma^3 \cdot m_0 \cdot \vec{a} = \mathbf{m}_0 \cdot \vec{\alpha} \quad (10.10)$$

Im Fall der Zentripetalbeschleunigung haben wir nämlich nach (7.7)

$$\vec{f} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{a} = \frac{1}{\gamma} \cdot \mathbf{m}_0 \cdot \vec{\alpha} \quad (10.11)$$

A11 Der Viererimpuls als Erhaltungsgrösse

Die Erhaltungssätze für die Gesamtenergie und den Gesamtimpuls können zusammengefasst werden zum Erhaltungssatz für den Viererimpuls.

Die Erhaltung des Viererimpulses bedeutet

$$\sum_i P_i = \sum_j P_j$$

wo die Summen über alle beteiligten Teilchen vor und nach einem Vorgang läuft.

Nun ist ja

$$P_i = \left(\frac{1}{c} \cdot E_i, \vec{p}_i \right)$$

Dass die Summe der ersten Komponenten konstant bleibt bedeutet also nichts anderes als die Erhaltung der relativistischen Gesamtenergie, und die Konstanz der Summe über die anderen drei Komponenten bedeutet die Erhaltung des relativistischen 3d-Gesamtimpulses.

Im zweiten Teil dieser Arbeit, bei den Anwendungsbeispielen, startet man immer mit der Erhaltung des Viererimpulses und versucht dann durch Bilden des Skalarprodukts mit anderen Vierervektoren Terme zu finden, die sich einfach berechnen lassen:

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 \quad \Rightarrow \quad P_1 \circ P_4 + P_2 \circ P_4 = P_3 \circ P_4 + P_4 \circ P_4$$

oder

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 \quad \Rightarrow \quad (P_1 + P_2) \circ (P_1 + P_2) = (P_3 + P_4) \circ (P_3 + P_4)$$

Die auftretenden Skalarprodukte berechnet man dann bei freier Wahl in jenem Bezugssystem, in welchem die Rechnung am einfachsten ist.

B12 Eine theoretische Anwendung

Wir beweisen, dass in jedem Bezugssystem S für jedes Objekt gilt $E_{tot}^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2$. (12.1)

P sei der Viererimpuls dieses Objektes im Bezugssystem S . Es ist $P = (E_{tot}/c, \vec{p})$. Im Ruhesystem des Teilchens hat es den Viererimpuls $P_0 = 1 \cdot m_0 \cdot (c, \vec{0}) = (E_0/c, \vec{0})$.

- $P \circ P = (E_{tot}/c)^2 - p^2$ nach der Definition des Skalarprodukts
- $P_0 \circ P_0 = (E_0/c)^2 - 0$ dito
- Daraus folgt schon $E_{tot}^2 - p^2 \cdot c^2 = c^2 \cdot (P \circ P) = c^2 \cdot (P_0 \circ P_0) = E_0^2$ q.e.d.

B13 Der Viererimpuls von Photonen

Für Photonen reduziert sich (12.1) wegen $m_0 = 0$ auf $E_{tot}^2 = 0 + p^2 \cdot c^2$. Es gilt somit für Lichtteilchen

$$E_{tot} = p \cdot c = E_{kin} = E \quad (13.1)$$

Es ist also $p = E/c$. Der Vierervektor eines Photons hat daher die Gestalt

$$P = (E/c, \vec{p}) = \frac{E}{c} \cdot (1, \vec{1}) = \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, \vec{1}) \quad (13.2)$$

Bewegt sich das Lichtteilchen beispielsweise in die y -Richtung, dann hat der Einheitsvektor $\vec{1}$ die Gestalt $\vec{1} = (0, 1, 0)$.

Wir werden im folgenden oft benützen, dass für den Viererimpuls von Photonen immer gilt

$$P \circ P = \frac{h \cdot f}{c} \cdot \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1 - 1) = 0 \quad (13.3)$$

Es ist ja allgemein $P \circ P = (E_0/c)^2$. Da Lichtteilchen keine Ruheenergie haben folgt auch daraus sofort (13.3).

B14 Was misst der schnelle Beobachter ?

Ein Objekt bewege sich im System S mit dem Viererimpuls $P = (E_{tot}/c, \vec{p}) = \gamma \cdot m_0 \cdot (c, \vec{v})$. Für einen im System S ruhenden Beobachter A gilt dann

- $E_{tot} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = c \cdot P^0 = U_0 \circ P$ mit der 'Eigengeschwindigkeit' $U_0 = 1 \cdot (c, \vec{0})$
- $E_0 = c \cdot \sqrt{P \circ P}$ da ja $P \circ P = m_0^2 \cdot c^2$
- $E_{kin} = E_{tot} - E_0 = U_0 \circ P - c \cdot \sqrt{P \circ P}$
- $m_0 = \sqrt{P \circ P} / c$

Nun bewege sich ein Beobachter B mit der Geschwindigkeit U im System S. Welche Werte misst dieser Beobachter an unserem Objekt ?

- E_0 und m_0 haben für B denselben Wert wie für den Beobachter A. Das sind ja *Invarianten*.
- $E_{tot}' = U_0' \circ P' = U \circ P$ wo $U_0' = 1 \cdot (c, \vec{0})$ die Eigengeschwindigkeit von B in seinem System S' ist
- $E_{kin}' = E_{tot}' - E_0' = U \circ P - c \cdot \sqrt{P \circ P}$

Alle Werte lassen sich sofort über unser Skalarprodukt berechnen.

Wie sieht es aus, wenn unser Objekt ein Photon ist ? Es ist dann $P = (E_{tot}/c, \vec{p}) = \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, \vec{1})$ wo $\vec{1}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist.

Für beide Beobachter gilt $m_0 = 0$ und $E_0 = 0$, und für beide gilt auch $E = E_{kin} = E_{tot}$. Die Energie des Photons hat aber nicht für beide denselben Wert:

Für A gilt $E = U_0 \circ P = 1 \cdot (c, \vec{0}) \circ \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, \vec{1}) = c \cdot P^0 = h \cdot f$

Für B gilt $E' = U \circ P = U_0' \circ P' = 1 \cdot (c, \vec{0}) \circ \frac{h \cdot f'}{c} \cdot (1, \vec{1}) = h \cdot f'$

Auch in diesem Fall lassen sich die Werte über das Skalarprodukt bestimmen.

B15 Paarvernichtung 1

Ein Elektron und ein Positron sollen frontal zusammenstossen. Wir betrachten die Kollision (und die anschliessende Zerstrahlung der beiden) in diesem Abschnitt im Schwerpunktsystem. Es sei

A der Viererimpuls des Elektrons: $A = \gamma \cdot m_0 \cdot (c, \vec{v})$

B der Viererimpuls des Positrons: $B = \gamma \cdot m_0 \cdot (c, -\vec{v})$

C der Viererimpuls des einen Photons: $C = \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, \vec{1})$

D der Viererimpuls des anderen Photons: $D = \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, -\vec{1})$

Der gesamte Dreier-Impuls ist vor der Kollision null, daher muss er auch nachher null sein. Es müssen also zwingend **zwei** Quanten entstehen mit entgegengesetzten Flugrichtungen und gleichen Energien ! Damit haben wir schon die räumlichen Komponenten der Gleichung

$$A + B = C + D$$

ausgewertet. Die zeitliche Komponente ist identisch mit dem Energieerhaltungssatz:

$$2 \cdot \gamma \cdot m_0 \cdot c = 2 \cdot h \cdot f / c$$

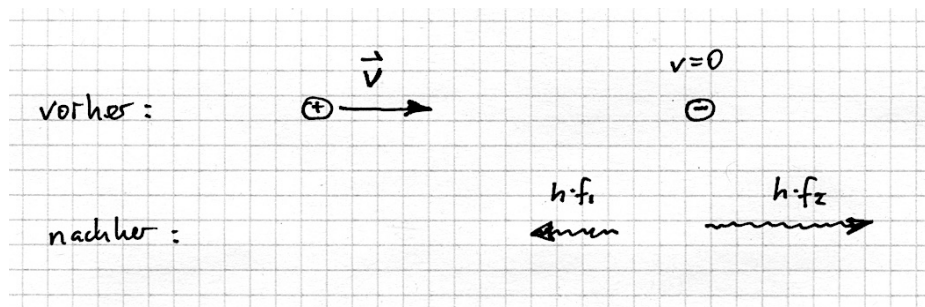
also

$$h \cdot f = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$$

Die Flugrichtung der beiden Quanten ist nicht bestimmt.

B16 Paarvernichtung 2

Nun soll ein schnelles Positron auf ein ruhendes Elektron stossen. Wir wissen aus dem letzten Abschnitt, dass bei der Zerstrahlung zwei Quanten entstehen müssen, deren 3-er-Impuls zusammen den 3-er-Impuls des einfallenden Positrons ergeben. Wir berechnen die Energien oder die Frequenzen der beiden Quanten für den Fall, dass die Quanten auf der Achse des einfallenden Positrons davonfliegen:



Die Rechnung führen wir zuerst nicht im System S der Zeichnung durch. Wir betrachten den Vorgang aus einem System T, welches sich mit w , der 'halben Geschwindigkeit' von v , bewegt (siehe [1 - 3]). Dann sind wir in der Situation des vorangehenden Abschnittes B15 und können sofort schreiben

$$h \cdot f' = \gamma_w \cdot m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 - \frac{w}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{w}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (16.1)$$

Nun berechnen wir die entsprechenden Frequenzen im System S. Wir benötigen dazu die Formel [1 - 1.4] für den longitudinalen Dopplereffekt:

$$h \cdot f_1 = h \cdot f' \cdot \sqrt{\frac{c-w}{c+w}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 - \frac{w}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{w}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{w}{c}\right)^{+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{w}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{c}{c+w} \quad (16.2)$$

und

$$h \cdot f_2 = h \cdot f' \cdot \sqrt{\frac{c+w}{c-w}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 - \frac{w}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{w}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{w}{c}\right)^{+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{w}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} = m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{c}{c-w}$$

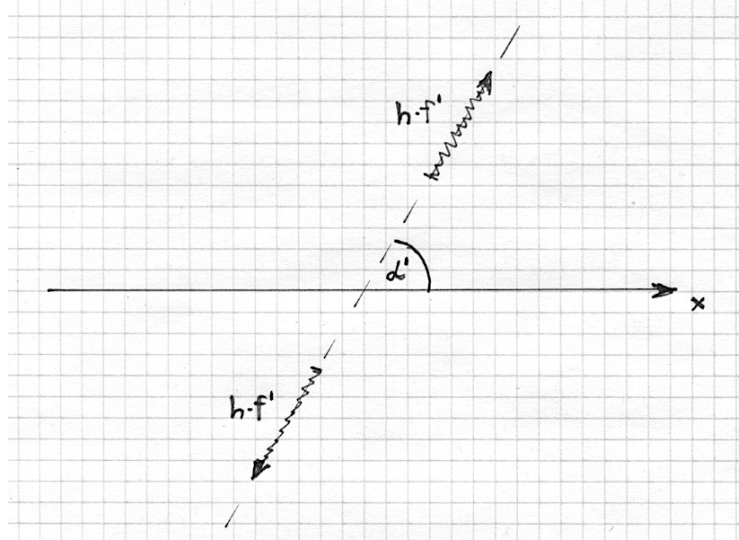
Eine ganz mühsame Rechnung bestätigt, dass mit diesen beiden Termen tatsächlich der Energieerhaltungssatz erfüllt ist. Mein Dank für die Durchführung dieser Rechnung geht an Mathematica® ... Es gilt also

$$h \cdot f_1 + h \cdot f_2 = \gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2 + m_0 \cdot c^2$$

Die Lösungen [2 - 29.44] zu dieser Paarvernichtung sehen viel komplizierter aus.

B17 Paarvernichtung 3

Wir sind in derselben Situation wie im Abschnitt B16. Nun sei aber gestattet, dass die Quanten im 'mittleren' System T in eine beliebige Richtung davon fliegen:



Das ursprüngliche System S bewegt sich mit w nach links gegenüber dem gezeichneten System T. Der obere Quant fliegt also dem Beobachter im System S entgegen und hat deshalb eine Frequenz f_1 , die grösser ist als f' und auch grösser als die Frequenz f_2 des unteren Quants. Wir benützen die allgemeine Dopplerformel von [1 - 22.1] :

$$f_s = f_T \cdot \frac{1}{\gamma_w \cdot \left(1 - \frac{w}{c} \cdot \cos \varphi\right)}$$

Für f_T haben wir f' aus dem letzten Abschnitt B16 einzusetzen. Die grössere Frequenz f_1 erhalten wir, wenn wir für φ den Winkel α' einsetzen; f_2 erhalten wir, wenn wir für φ den Winkel $180^\circ - \alpha'$ einsetzen:

$$h \cdot f_1 = h \cdot f' \cdot \frac{1}{\gamma_w \cdot \left(1 - \frac{w}{c} \cdot \cos(\alpha')\right)} = \gamma_w \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\gamma_w \cdot \left(1 - \frac{w}{c} \cdot \cos(\alpha')\right)} = \frac{m_0 \cdot c^2}{1 - \frac{w}{c} \cdot \cos(\alpha')}$$

$$h \cdot f_2 = h \cdot f' \cdot \frac{1}{\gamma_w \cdot \left(1 - \frac{w}{c} \cdot \cos(180^\circ - \alpha')\right)} = \gamma_w \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\gamma_w \cdot \left(1 + \frac{w}{c} \cdot \cos(\alpha')\right)} = \frac{m_0 \cdot c^2}{1 + \frac{w}{c} \cdot \cos(\alpha')}$$

Im letzten Abschnitt haben wir den Spezialfall von $\alpha = 0^\circ$ behandelt. Dann ist $\cos(\alpha) = 1$ und wir erhalten die Resultate des letzten Abschnittes.

Die Verwendung der 'halben Geschwindigkeit' w erleichtert nicht nur die Rechnungen, es entstehen auch schöne oder einfache Ergebnisse !

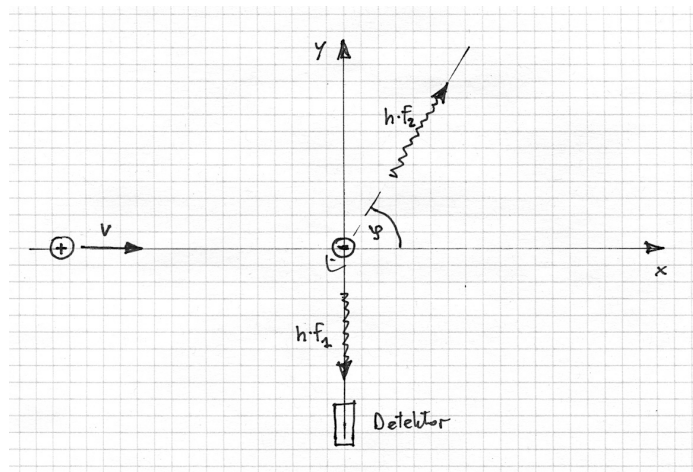
Im System S sind die beiden Winkel α und β nach der Aberrationsformel [1-22.3] kleiner als α' respektive $180^\circ - \alpha'$:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c-w}{c+w}} \cdot \tan \frac{\alpha'}{2} \quad \text{und} \quad \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{c-w}{c+w}} \cdot \tan \frac{180^\circ - \alpha'}{2}$$

Die beiden 3er-Impulse der Quanten müssen ja den 3er-Impuls des einfallenden Positrons ergeben.

B18 Paarvernichtung 4

Wir sind nochmals in derselben Situation von B16. Nun sei aber ein Detektor so montiert, dass er nur Quanten registriert, die senkrecht zur Einfallsrichtung des Positrons wegfliegen:



Gesucht sind die beiden Energien der Quanten sowie der Winkel φ , unter dem der zweite Quant entteilt. Wir arbeiten mit den folgenden Viererimpulsen:

- $P_1 = \gamma_v \cdot m_0 \cdot (c, v, 0, 0)$ der Viererimpuls des einfallenden Positrons
- $P_2 = m_0 \cdot (c, 0, 0, 0)$ der Viererimpuls des ruhenden Elektrons
- $P_3 = \frac{h}{c} \cdot f_1 \cdot (1, 0, -1, 0)$ der Viererimpuls des Quants, der in den Detektor fliegt
- $P_4 = \frac{h}{c} \cdot f_2 \cdot (1, \cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$ der Viererimpuls des anderen Quants

Die Erhaltung des Viererimpulses bedeutet $P_1 + P_2 = P_3 + P_4$. Die ersten drei Komponenten liefern uns drei Gleichungen für die drei Unbekannten f_1 , f_2 und φ :

$$\gamma_v \cdot m_0 \cdot c + m_0 \cdot c = \frac{h}{c} \cdot f_1 + \frac{h}{c} \cdot f_2$$

multipliziert mit c erhalten wir (nicht überraschend) $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ (18.1)

$$\gamma_v \cdot m_0 \cdot v + 0 = 0 + \frac{h}{c} \cdot f_2 \cdot \cos(\varphi)$$

multipliziert mit c erhalten wir diesmal $E_1 \cdot \frac{v}{c} = E_4 \cdot \cos(\varphi)$ (18.2)

$$0 = \frac{h}{c} \cdot f_2 \cdot (-1) + \frac{h}{c} \cdot f_2 \cdot \sin(\varphi)$$

auch hier multiplizieren wir mit c und erhalten $E_3 = E_4 \cdot \sin(\varphi)$ (18.3)

Wir eliminieren zuerst den Winkel φ indem wir die Quadrate von (18.2) und (18.3) addieren:

$$E_1^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} + E_3^2 = E_4^2 \cdot (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = E_4^2 \quad \text{oder} \quad E_4^2 - E_3^2 = E_1^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad (18.4)$$

Nun multiplizieren wir (18.1) mit $E_4 - E_3$ und erhalten

$$(E_1 + E_2) \cdot (E_4 - E_3) = (E_3 + E_4) \cdot (E_4 - E_3) = E_4^2 - E_3^2 = E_1^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad (18.5)$$

Wir dividieren (18.5) durch $(E_1 + E_2)$ und erhalten

$$E_4 - E_3 = \frac{E_1^2 \cdot \frac{v^2}{c^2}}{E_1 + E_2} \quad (18.6)$$

Aus (18.1) haben wir immer noch

$$E_4 + E_3 = E_1 + E_2 \quad (18.7)$$

Nun addieren wir (18.6) und (18.7)

$$2 \cdot E_4 = E_1 + E_2 + \frac{E_1^2 \cdot \frac{v^2}{c^2}}{E_1 + E_2} \quad (18.8)$$

Mit einer Nebenrechnung drücken wir auch $\frac{v^2}{c^2}$ durch die Energien E_1 und E_2 aus :

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} = \frac{E_2^2}{E_1^2}, \text{ also } \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{E_2^2}{E_1^2} = \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1^2} \quad (18.9)$$

Setzen wir (18.9) in (18.8) ein erhalten wir

$$2 \cdot E_4 = E_1 + E_2 + \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1^2} = E_1 + E_2 + E_1 - E_2 = 2 \cdot E_1 \quad (18.10)$$

Es gilt somit, zusammen mit (18.7)

$$E_4 = E_1 \quad \text{und} \quad E_3 = E_2 \quad (18.11)$$

Für den Winkel φ berechnen wir

$$\cos(\varphi) = \frac{p_{1x}}{p_4} = \frac{\gamma \cdot m_0 \cdot v}{E_4/c} = \frac{\gamma \cdot m_0 \cdot v}{E_1/c} = \frac{\gamma \cdot m_0 \cdot v}{\gamma \cdot m_0 \cdot c} = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{E_2^2}{E_1^2}} \quad (18.12)$$

Damit haben wir die gesuchten Grössen alle durch die Anfangsenergien ausgedrückt. Es ist offensichtlich, dass die Lösungen (18.11) und (18.12) den Gleichungen (18.1) bis (18.3) genügen ! Wir notieren die Lösungen nochmals:

- $h \cdot f_1 = E_3 = E_2 = m_0 \cdot c^2$
- $h \cdot f_2 = E_4 = E_1 = \gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2$
- $\cos(\varphi) = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{E_2^2}{E_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

Aus den beiden Frequenzen (respektive Energien) der Quanten und dem Winkel φ kann man also die Energie (oder die Geschwindigkeit) des einfallenden Positrons bestimmen - und umgekehrt.

B19 Paarerzeugung

Aus einem hochenergetischen Quant allein kann kein Elektron-Positron-Paar entstehen. Für das Paar der Teilchen existiert ja ein Schwerpunktssystem, in welchem der 3er-Impuls null ist. Für das einfallende Quantum gibt es sowas nicht. Es muss also noch ein weiteres Teilchen (in der Regel ein Atomkern) beteiligt sein, damit diese Paarerzeugung stattfinden kann. Das ist ein Glück für die Astronomen: Die Quanten können in der Leere des Alls nicht einfach spontan in ein Teilchenpaar zerfallen. Die meisten reisen daher unverändert über 'astronomische' Strecken.

Wir denken im Ruhesystem des beteiligten Atomkerns und verwenden die folgenden Bezeichnungen:

- $P_1 = \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, 1, 0, 0)$ für den Viererimpuls des einfallenden Quants
- $P_2 = (M \cdot c, 0, 0, 0)$ für den Viererimpuls des ruhenden weiteren Teilchens mit der Ruhemasse M
- P_3 für den Viererimpuls des Clusters bestehend aus den beiden neuen Teilchen und dem weiteren beteiligten Teilchen *nach* der Paarerzeugung

Wir werden also nicht die Impulse der einzelnen Teilchen bestimmen, das ist ohne weitere Angaben gar nicht möglich. Die Erhaltung des Viererimpulses bedeutet

$$P_1 + P_2 = P_3$$

Wir quadrieren diese Gleichung:

$$P_1 \circ P_1 + 2 \cdot P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_2 = P_3 \circ P_3 \quad (19.1)$$

$P_1 \circ P_1$ ist null, $P_2 \circ P_2$ hat den Wert $(M \cdot c)^2$ und bei $P_1 \circ P_2$ bleibt nur der zeitliche Anteil $h \cdot f \cdot M$ übrig. Das Quadrat des Viererimpulses des Clusters berechnen wir in seinem Ruhesystem. Dort ist

$$P_3' = ((M + 2 \cdot m_0) \cdot c, 0, 0, 0) \quad \text{und damit} \quad P_3 \circ P_3 = P_3' \circ P_3' = (M + 2 \cdot m_0)^2 \cdot c^2.$$

Eingesetzt in (19.1) erhalten wir

$$0 + 2 \cdot h \cdot f \cdot M + (M \cdot c)^2 = (M + 2 \cdot m_0)^2 \cdot c^2$$

Ausmultipliziert

$$2 \cdot h \cdot f \cdot M + M^2 \cdot c^2 = M^2 \cdot c^2 + 4 \cdot M \cdot m_0 \cdot c^2 + 4 \cdot m_0^2 \cdot c^2$$

und vereinfacht

$$h \cdot f = 2 \cdot m_0 \cdot c^2 + 2 \cdot m_0^2 \cdot c^2 / M = 2 \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{m_0}{M}\right) \quad (19.2)$$

Man sieht auch am Ergebnis, dass ohne ein weiteres Teilchen, also für $M = 0$, der benötigte Energieaufwand unendlich gross wäre. Ist das weitere beteiligte Teilchen kein Atomkern, sondern auch nur ein Elektron, so muss die einfallende Energie doppelt so gross sein wie die Ruheenergie der erzeugten Teilchen.

B20 Der vollkommen inelastische Stoss

Zwei Teilchen mit den Ruhemassen m_a und m_b bewegen sich im Laborsystem S mit den Geschwindigkeiten $\vec{u}_a = (u_a, 0, 0)$ und $\vec{u}_b = (u_b, 0, 0)$ in der x-Richtung. Sie stossen vollkommen inelastisch zusammen, bilden also nach der Kollision ein einziges Teilchen. Wie gross ist die Ruhemasse m_c des entstandenen Teilchens, und mit welcher Geschwindigkeit $\vec{u}_c = (u_c, 0, 0)$ bewegt sich dieses im Laborsystem?

Die Erhaltung des Viererimpulses bedeutet $P_a + P_b = P_c$. Wir quadrieren und erhalten

$$P_a \circ P_a + 2 \cdot P_a \circ P_b + P_b \circ P_b = P_c \circ P_c$$

Die Quadrate berechnen wir natürlich im jeweiligen Ruhesystem und erhalten

$$m_a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot \gamma_a \cdot m_a \cdot (c, u_a, 0, 0) \circ \gamma_b \cdot m_b \cdot (c, u_b, 0, 0) + m_b^2 \cdot c^2 = m_c^2 \cdot c^2$$

Wir dividieren durch c^2 und berechnen das Skalarprodukt:

$$m_a^2 + 2 \cdot \gamma_a \cdot m_a \cdot \gamma_b \cdot m_b \cdot \frac{(c^2 - u_a \cdot u_b)}{c^2} + m_b^2 = m_c^2$$

Etwas umgestellt:

$$m_c^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2 \cdot m_a \cdot m_b \cdot \left(\gamma_a \cdot \gamma_b \cdot \left(1 - \frac{u_a \cdot u_b}{c^2} \right) \right) \quad (20.1)$$

Für den Vergleich mit

$$(m_a + m_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2 \cdot m_a \cdot m_b$$

untersuchen noch den Term

$$k = \gamma_a \cdot \gamma_b \cdot \left(1 - \frac{u_a \cdot u_b}{c^2} \right) = \left(1 - \frac{u_a^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{u_b^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{u_a \cdot u_b}{c^2} \right)$$

Haben u_a und u_b unterschiedliche Vorzeichen, stossen die beiden Teilchen also gegenläufig aufeinander, so sind alle drei Faktoren grösser als 1, und m_c ist entsprechend grösser als $m_a + m_b$. Ist eine der beiden Geschwindigkeiten null so verschwindet der dritte Faktor, einer der ersten beiden wird 1 und der restliche ist wieder grösser als 1. Mit einigem Aufwand kann man zeigen, dass k auch im letzten Fall, wo u_a und u_b dasselbe Vorzeichen haben, grösser ist als 1. Die Ruhemasse des entstandenen Teilchens ist also immer grösser als die Summe der Ruhemassen der Ausgangsteilchen, es wird immer ein Teil der kinetischen Energie in Ruheenergie umgewandelt.

Wir berechnen noch die Geschwindigkeit u_c des entstandenen Teilchens. Der Energiesatz, also die zeitliche Komponente der Erhaltung des Viererimpulses, liefert

$$\gamma_a \cdot m_a \cdot c^2 + \gamma_b \cdot m_b \cdot c^2 = \gamma_c \cdot m_c \cdot c^2$$

Der Impulssatz, also die räumliche Komponente der Erhaltung des Viererimpulses, liefert

$$\gamma_a \cdot m_a \cdot u_a + \gamma_b \cdot m_b \cdot u_b = \gamma_c \cdot m_c \cdot u_c$$

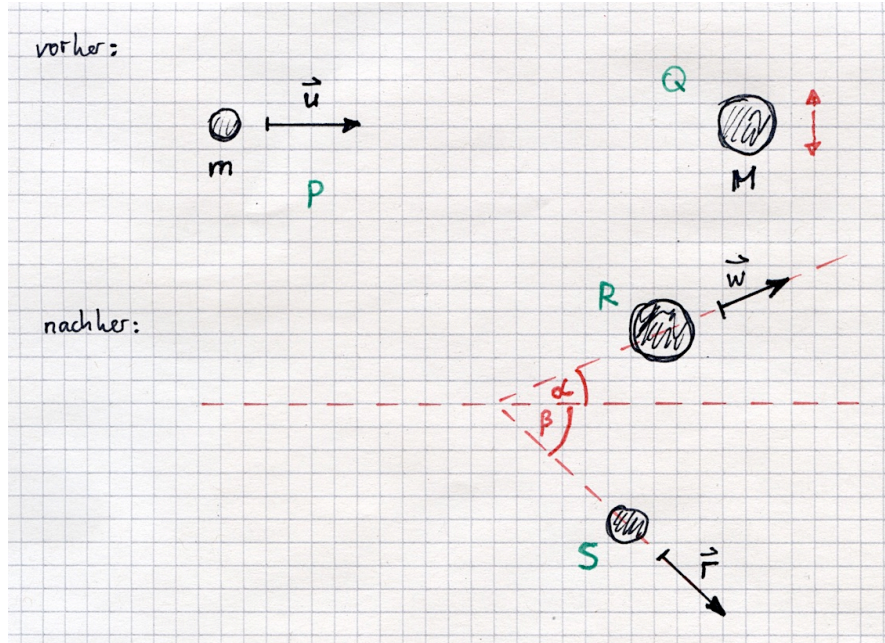
Wir dividieren die Energiebilanz durch c^2 und erhalten einen Term für $\gamma_c \cdot m_c$, den wir in die Impulsgleichung einsetzen:

$$u_c = \frac{\gamma_a \cdot m_a \cdot u_a + \gamma_b \cdot m_b \cdot u_b}{\gamma_a \cdot m_a + \gamma_b \cdot m_b} \quad (20.2)$$

u_c ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systems vor und nach der Kollision.

B21 Der vollkommen elastische Stoss 1

Ein Teilchen der Ruhemasse m stösst mit der Geschwindigkeit $u = u_x$ gegen ein ruhendes Teilchen der Masse M . Der Stoss braucht nicht zentral zu sein:



Gegeben oder gemessen seien die Geschwindigkeit u des stossenden Teilchens, das Verhältnis m/M der Ruhemassen und der Winkel α , unter welchem sich das gestossene Teilchen von der x-Achse wegbewegt. Berechnet werden die beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoss sowie der Winkel β .

Wir starten mit dem Erhaltungssatz für den Viererimpuls: $P + Q = R + S$ mit (21.1)

$P = \gamma_u \cdot m \cdot (c, u, 0, 0)$	das schnelle Teilchen vor dem Stoss
$Q = M \cdot (c, 0, 0, 0)$	das ruhende Teilchen vor dem Stoss
$R = \gamma_w \cdot M \cdot (c, w \cdot \cos(\alpha), w \cdot \sin(\alpha), 0)$	das gestossene Teilchen nach dem Stoss
$S = \gamma_r \cdot m \cdot (c, r \cdot \cos(\alpha), r \cdot \sin(\alpha), 0)$	das stossende Teilchen nach dem Stoss

Wir quadrieren (21.1) und erhalten $P \circ P + 2 \cdot P \circ Q + Q \circ Q = R \circ R + 2 \cdot R \circ S + S \circ S$ (21.2)
 Wegen $P \circ P = S \circ S$ und $Q \circ Q = R \circ R$ folgt daraus $P \circ Q = R \circ S$. Nun multiplizieren wir (21.1) mit R :

$$P \circ R + Q \circ R = R \circ R + S \circ R = R \circ R + P \circ Q \quad (21.3)$$

Damit ist S eliminiert und wir können die Geschwindigkeit w berechnen. Es ist

$$P \circ R = \gamma_u \cdot \gamma_w \cdot m \cdot M \cdot (c^2 - u \cdot w \cdot \cos(\alpha)), \quad Q \circ R = \gamma_w \cdot M^2 \cdot c^2, \quad R \circ R = M^2 \cdot c^2 \quad \text{und} \quad P \circ Q = \gamma_u \cdot m \cdot M \cdot c^2$$

Setzt man diese Terme in (21.3) ein so erhält man nach einigen Umformungen aus einer linearen Gleichung

$$w = \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{\gamma_u}\right) \cdot u \cdot \cos(\alpha)}{\left(1 + \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{\gamma_u}\right)^2 + u^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \quad (21.4)$$

$$\text{Aus } w \text{ und } \alpha \text{ erhalten wir dann } \gamma_w = (1 - w^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad w_x = w \cdot \cos(\alpha) \quad \text{und} \quad w_y = w \cdot \sin(\alpha) \quad (21.5)$$

Nun benützen wir die erste Zeile von (21.1), also den Energiesatz: $\gamma_u \cdot m \cdot c + M \cdot c = \gamma_w \cdot M \cdot c + \gamma_r \cdot m \cdot c$
 Nach γ_r aufgelöst :

$$\gamma_r = \gamma_u + \frac{M}{m} - \frac{M}{m} \cdot \gamma_w \quad \text{und daraus} \quad r = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_r^2}} \quad (21.6)$$

Aus der Impulserhaltung, also der zweiten und der dritten Zeile von (21.1), erhalten wir noch die beiden Komponenten der Geschwindigkeit r und den Winkel β :

$$\begin{aligned} \gamma_u \cdot m \cdot u &= \gamma_r \cdot m \cdot r_x + \gamma_w \cdot M \cdot w_x \quad \rightarrow \quad r_x = \left(\gamma_u \cdot u - \gamma_w \cdot \frac{M}{m} \cdot w_x \right) / \gamma_r \\ 0 &= \gamma_r \cdot m \cdot r_y + \gamma_w \cdot M \cdot w_y \quad \rightarrow \quad r_y = \left(-\gamma_w \cdot \frac{M}{m} \cdot w_y \right) / \gamma_r \end{aligned} \quad (21.7)$$

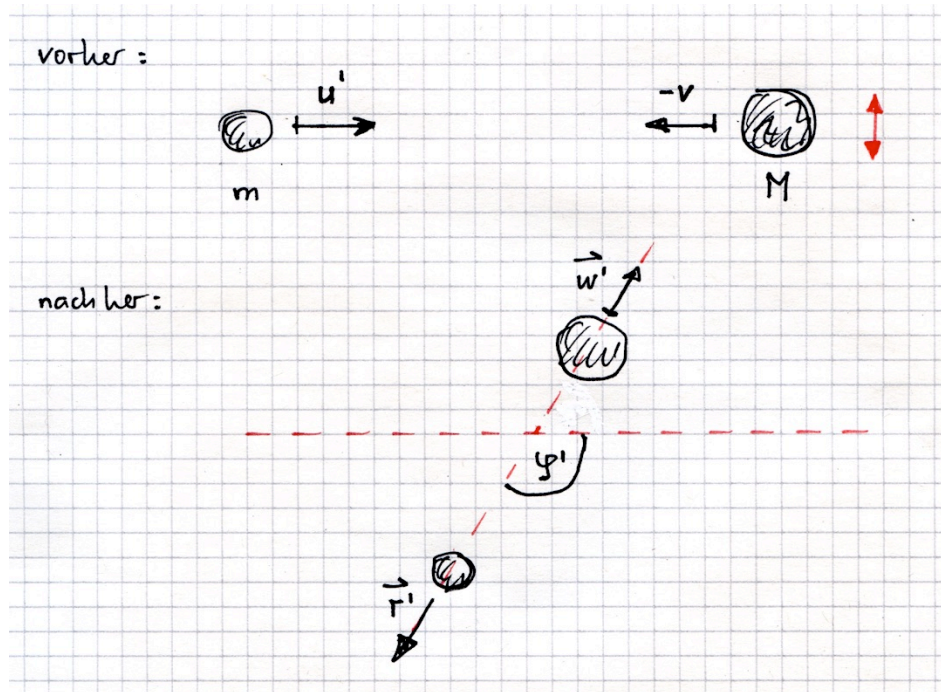
Da wir w_y positiv gewählt haben ist der Wert von r_y immer negativ. Der Wert von r_x kann beide Vorzeichen annehmen.
 β bestimmen wir daher durch

$$\beta = \sin^{-1}(r_x/r) \quad (21.8)$$

Zu diesen Rechnungen habe ich ein GeoGebra-Programm geschrieben. Dort können die Werte von u , M/m und α mit Schieberegler eingestellt werden. Das Programm zeigt dann die beiden Teilchen nach dem Stoss und gibt die Werte der Geschwindigkeiten und der beiden Winkel an. Der Link zu diesem kleinen Programm ist
https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/GeoGebra/ElastStoss_1.ggb

B22 Der vollkommen elastische Stoss 2

Wir sind in derselben Situation wie in B21, man beachte die dortige Zeichnung. Diesmal betrachten wir das Geschehen aber im Schwerpunktsystem S' der beiden Teilchen :



v ist die Geschwindigkeit von S' gegenüber S . Das in S ruhende Teilchen M bewegt sich in S' mit $-v$ in der x -Richtung. Der Gesamtimpuls ist in S' vor dem Stoss null und muss daher auch nach dem Stoss null sein. Die beiden Teilchen bewegen sich also in entgegengesetzten Richtungen auseinander. Da auch die Gesamtenergie erhalten bleibt muss gelten

$$|w'| = |-v| \quad \text{und} \quad |r'| = |u'| \quad (22.1)$$

Die Relativgeschwindigkeit v von S' gegenüber S berechnen wir mit der Formel [1 - 7.1] :

$$v = \frac{p_{tot} \cdot c^2}{E_{tot}} = \frac{\gamma_u \cdot m \cdot u \cdot c^2}{\gamma_u \cdot m \cdot c^2 + M \cdot c^2} = \frac{\gamma_u}{\gamma_u + M/m} \cdot u \quad (22.2)$$

Damit ist auch γ_v bekannt.

Für die Berechnung der Geschwindigkeiten nach dem Stoss brauchen wir nebst u und M/m noch den Winkel φ' , unter welchem sich der stossende Körper nach dem Stoss von der positiven x -Achse entfernt. φ' kann stumpf sein falls $m < M$ gilt.

Nach dem Additionstheorem für parallele Geschwindigkeiten ist

$$u' = \frac{u - v}{1 + u \cdot v/c^2} \quad (22.3)$$

$$\text{Wegen (22.1) gilt} \quad r' = u' \quad , \quad r'_x = u' \cdot \cos(\varphi') \quad \text{und} \quad r'_y = -u' \cdot \sin(\varphi') \quad (22.4)$$

$$\text{und} \quad w' = v \quad , \quad w'_x = -v \cdot \cos(\varphi') \quad \text{und} \quad w'_y = v \cdot \sin(\varphi') \quad (22.5)$$

Diese Geschwindigkeiten rechnen wir jetzt mithilfe der Formeln [1 - 22.1] und [1 - 22.2] um ins System S .

Es ist

$$r_x = \frac{r_x' + v}{1 + v \cdot r_x' / c^2} \quad , \quad r_y = \frac{r_y'}{\gamma_v \cdot (1 + v \cdot r_x' / c^2)} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (22.6)$$

und genauso

$$w_x = \frac{w_x' + v}{1 + v \cdot w_x' / c^2} \quad , \quad w_y = \frac{w_y'}{\gamma_v \cdot (1 + v \cdot w_x' / c^2)} \quad \text{und} \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad (22.6)$$

Es bleiben noch die Winkel α und β zu berechnen, unter denen sich die beiden Körper in S von der x-Achse entfernen. Dazu gibt es viele Möglichkeiten, zum Beispiel so:

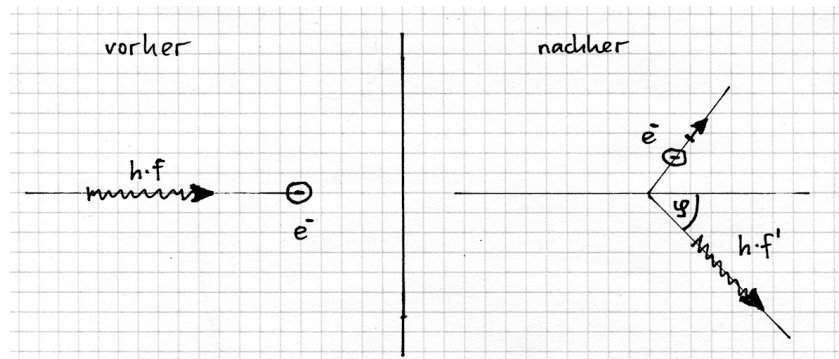
$$\alpha = \tan^{-1}(w_y/w_x) = \cos^{-1}(w_x/w) \quad \text{und} \quad \beta = \cos^{-1}(r_x/r) \quad (22.7)$$

Auch zu dieser Variante der Berechnung eines vollkommen elastischen Stosses in der SRT habe ich zur Kontrolle ein kleines GeoGebra-Programm geschrieben. u , M/m und φ' lassen sich mit Schiebereglern einstellen, und das Programm zeigt dann die Geschwindigkeiten nach dem Stoss sowie die Winkel α und β an. Falls $m > M$ gilt kann der Winkel φ' nicht grösser sein als 90° .

Der Link zu diesem kleinen Programm ist https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/GeoGebra/ElastStoss_2.ggb

B23 Die Compton-Streuformel

Wir betrachten den elastischen Stoss eines Photons gegen ein ruhendes freies Elektron:



Vor dem Stoss haben wir die Viererimpulse $P = \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, 1, 0, 0)$ und $Q = m_0 \cdot (c, 0, 0, 0)$

Nach dem Stoss haben wir $R = \frac{h \cdot f'}{c} \cdot (1, \cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ und $Q' = \gamma_v \cdot m_0 \cdot (c, \vec{u})$

Ausgangspunkt ist der Erhaltungssatz für den Viererimpuls: $P + Q = R + Q'$ (23.1)

Er wird quadriert $P \circ P + 2 \cdot Q \circ P + Q \circ Q = R \circ R + 2 \cdot Q' \circ R + Q' \circ Q'$

somit $0 + 2 \cdot Q \circ P + Q \circ Q = 0 + 2 \cdot Q' \circ R + Q \circ Q$ und $Q \circ P = Q' \circ R$ (23.2)

Wir multiplizieren (23.1) mit P' und benützen (23.2): $P \circ R + Q \circ R = R \circ R + Q' \circ R = 0 + Q \circ P$ (23.3)

Q' ist eliminiert! Wir berechnen die übriggebliebenen drei Skalarprodukte von (23.3):

- $P \circ R = \frac{h \cdot f}{c} \cdot \frac{h \cdot f'}{c} \cdot (1 - \cos \varphi) = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{h}{\lambda'} \cdot (1 - \cos \varphi) = \frac{1}{c^2} \cdot E \cdot E' \cdot (1 - \cos \varphi)$
- $Q \circ R = m_0 \cdot c \cdot \frac{h \cdot f'}{c} = m_0 \cdot c \cdot \frac{h}{\lambda'} = \frac{1}{c^2} \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot E'$
- $Q \circ P = m_0 \cdot c \cdot \frac{h \cdot f}{c} = m_0 \cdot c \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{1}{c^2} \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot E$

Eingesetzt in (23.3) $\frac{h}{\lambda} \cdot \frac{h}{\lambda'} \cdot (1 - \cos \varphi) + m_0 \cdot c \cdot \frac{h}{\lambda'} = m_0 \cdot c \cdot \frac{h}{\lambda}$

und multipliziert mit $\frac{\lambda \cdot \lambda'}{h}$ $h \cdot (1 - \cos \varphi) + m_0 \cdot c \cdot \lambda = m_0 \cdot c \cdot \lambda'$

und noch etwas umgestellt $h \cdot (1 - \cos \varphi) = m_0 \cdot c \cdot (\lambda' - \lambda)$

Damit haben wir die Streuformel von Compton gefunden: $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} \cdot (1 - \cos \varphi)$ (23.4)

$\frac{h}{m_0 \cdot c} \approx 2.426$ Pikometer ist die sogenannte *Compton-Wellenlänge* des Elektrons.

Auf der folgenden Seite bestimmen wir noch die Energie $E' = h \cdot f'$ des gestreuten Photons aus der Energie $E = h \cdot f$ des einfallenden Photons und dem Streuwinkel.

Wir schreiben (23.3) nochmals und verwenden diesmal die Energierterme für die Skalarprodukte:

$$\frac{1}{c^2} \cdot E \cdot E' \cdot (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{c^2} \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot E' = \frac{1}{c^2} \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot E \quad (23.5)$$

Multipliziert mit c^2 und etwas umgestellt

$$E' \cdot (E \cdot (1 - \cos \varphi) + m_0 \cdot c^2) = m_0 \cdot c^2 \cdot E$$

und nach E' aufgelöst

$$E' = \frac{m_0 \cdot c^2 \cdot E}{E \cdot (1 - \cos \varphi) + m_0 \cdot c^2} = E \cdot \frac{1}{1 + \frac{E}{m_0 \cdot c^2} \cdot (1 - \cos \varphi)} \quad (23.6)$$

oder

$$f' = \frac{m_0 \cdot c^2 \cdot h \cdot f}{h \cdot f \cdot (1 - \cos \varphi) + m_0 \cdot c^2} = f \cdot \frac{1}{1 + \frac{h \cdot f}{m_0 \cdot c^2} \cdot (1 - \cos \varphi)} \quad (23.7)$$

$\frac{m_0 \cdot c^2}{h} \approx 1.236 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$ müsste dann die *Compton-Frequenz* des Elektrons genannt werden.

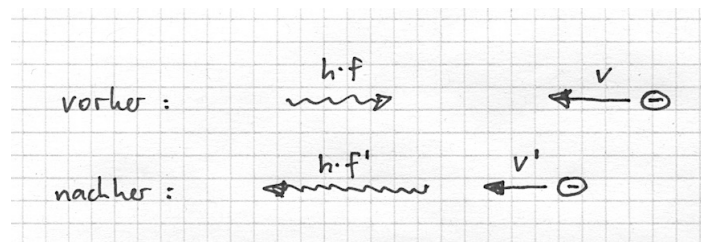
(23.4) und (23.6) zeigen, dass die Energie des gestreuten Photons immer kleiner ist als die Energie des einfallenden Photons, wie es ja nach dem Energiesatz sowieso sein muss. (23.6) zeigt noch

$$E' \geq E \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot E}{m_0 \cdot c^2}}$$

Eine exakte Rechnung ohne Vierervektoren ist hier viel aufwendiger. Man vergleiche zum Beispiel mit https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Relativ/Relativ_03.pdf

B24 Der inverse Compton-Effekt

Ein Photon kann viel Energie gewinnen, wenn es frontal und elastisch gegen ein sehr schnelles Elektron stösst:



Wir brauchen die folgenden Viererimpulse :

- $P = \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, -1, 0, 0)$ für das Photon vor dem Stoss
- $Q = \gamma_v \cdot m_0 \cdot (c, v, 0, 0)$ für das Elektron vor dem Stoss
- $R = \frac{h \cdot f'}{c} \cdot (1, 1, 0, 0)$ für das Photon nach dem Stoss
- $S = \gamma_{v'} \cdot m_0 \cdot (c, v', 0, 0)$ für das Elektron nach dem Stoss

Wir starten wieder mit der Erhaltung des Viererimpulses $P + Q = R + S$ (24.1)

quadriert $P \circ P + 2 \cdot P \circ Q + Q \circ Q = R \circ R + 2 \cdot R \circ S + S \circ S$

ausgewertet $0 + 2 \cdot P \circ Q + m_0^2 \cdot c^2 = 0 + 2 \cdot R \circ S + m_0^2 \cdot c^2$

also gilt $P \circ Q = R \circ S$ (24.2)

Nun multiplizieren wir (24.1) mit R $P \circ R + Q \circ R = R \circ R + S \circ R = 0 + P \circ Q$

und erhalten $P \circ R + Q \circ R = P \circ Q$ (24.3)

S ist eliminiert. Nun bestimmen wir die drei Skalarprodukte:

- $P \circ R = \frac{h \cdot f}{c} \cdot \frac{h \cdot f'}{c} \cdot (1 + 1 - 0 - 0) = 2 \cdot \frac{h \cdot f}{c} \cdot \frac{h \cdot f'}{c}$
- $Q \circ R = R \circ Q = \frac{h \cdot f'}{c} \cdot \gamma_v \cdot m_0 \cdot (c - v)$
- $P \circ Q = \frac{h \cdot f}{c} \cdot \gamma_v \cdot m_0 \cdot (c + v)$

eingesetzt in (24.3): $2 \cdot \frac{h \cdot f}{c} \cdot \frac{h \cdot f'}{c} + \frac{h \cdot f'}{c} \cdot \gamma_v \cdot m_0 \cdot (c - v) = \frac{h \cdot f}{c} \cdot \gamma_v \cdot m_0 \cdot (c + v)$

durch $\gamma_v \cdot m_0$ $\frac{2}{\gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2} \cdot h \cdot f \cdot h \cdot f' + h \cdot f' \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) = h \cdot f \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx 2 \cdot h \cdot f$ (24.4)

Wir machen einen sehr kleinen Fehler, wenn wir für $v \approx c$ die Klammer $\left(1 + \frac{v}{c}\right)$ durch die Zahl 2 ersetzen !

Dividiert durch 2 $h \cdot f' \cdot \left(\frac{1}{\gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2} \cdot h \cdot f + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)\right) = h \cdot f$

$$\begin{aligned}
 h \cdot f' &= \frac{h \cdot f}{\frac{1}{\gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2} \cdot h \cdot f + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{(c-v)}{2 \cdot c} \cdot \frac{\gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2}{h \cdot f}} = \\
 &= \gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{(c-v) \cdot \gamma_v \cdot m_0 \cdot \lambda}{2 \cdot h}}
 \end{aligned} \tag{24.5}$$

Für $v \approx c$ gilt *) in sehr guter Näherung $\gamma_v \cdot (c - v) \approx c / (2 \cdot \gamma_v)$. Damit vereinfacht sich (24.5) zu

$$E' = h \cdot f' \approx \gamma_v \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{c \cdot m_0 \cdot \lambda}{4 \cdot \gamma_v \cdot h}} \tag{24.6}$$

Nun schätzen wir den zweiten Summanden im Nenner ab für $\gamma_v = 10'000$. Für λ setzen wir 500 nm ein :

$$\frac{c \cdot m_0 \cdot \lambda}{4 \cdot \gamma_v \cdot h} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{8 \cdot 10^5 \cdot 6.6 \cdot 10^{-34}} \approx 0.517$$

Dann ist also

$$E' \approx \frac{1}{1.517} \cdot 10'000 \cdot m_0 \cdot c^2 \approx 6'592 \cdot m_0 \cdot c^2 \approx 6'592 \cdot 511 \text{ keV} \approx 3.37 \text{ MeV}$$

Je grösser die Energie des stossenden Elektrons ist umso grösser ist der Anteil, der dem gestossenen Quant zugute kommt. Auf diese Weise können Gammaquanten mit extrem hohen Energien erzeugt werden.

γ_v	$E' / (m_0 \cdot c^2)$
10	0.019
100	5.27
1'000	162
10'000	6592
100'000	95'084

*)

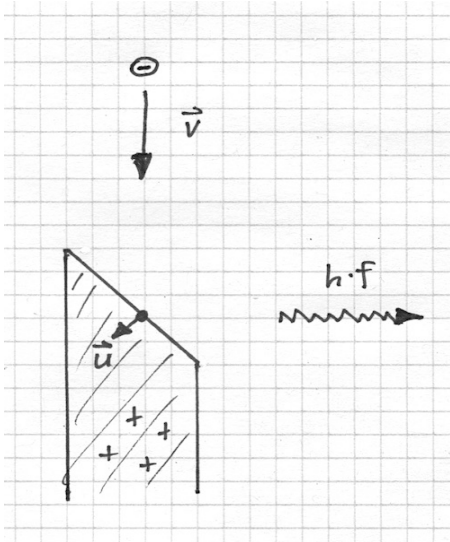
$$\gamma_v \cdot (c - v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} \cdot c \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) = c \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} \approx c \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{c} \cdot \frac{\sqrt{c - v}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2} \cdot \gamma_v} \approx \frac{c - v}{\sqrt{c - v}} = \sqrt{c - v}$$

$$c - v \approx \frac{c}{2 \cdot \gamma_v^2} \quad \text{und} \quad \gamma_v \cdot (c - v) \approx \frac{c}{2 \cdot \gamma_v}$$

B25 Bremsstrahlung

Ein Elektron durchläuft in einer Vakuum-Röhre eine Beschleunigungsspannung von einigen zehn Kilovolt und prallt dann auf ein Anodenmaterial auf. Dabei gibt es einen beträchtlichen Teil seiner Energie als Röntgenquant ab. Vor dem Aufprall haben wir ein schnelles Elektron und ein ruhendes Atom in der Anode. Nach dem Aufprall haben wir ein angestossenes Atom samt Elektron (wir behandeln das als *einen* Cluster) sowie den Röntgenquant:



Die folgenden Vierervektoren gehen in die Rechnung ein:

- $P = \gamma_v \cdot m_0 \cdot (c, v, 0, 0)$ das Elektron vor dem Aufprall
- $Q = 1 \cdot M \cdot (c, 0, 0, 0)$ das Atom vor dem Stoss
- $R = \gamma_u \cdot (M + m_0) \cdot (c, u_x, u_y, 0)$ Atom und Elektron nach dem Stoss
- $S = \frac{h \cdot f}{c} \cdot (1, 0, 1, 0)$ der Röntgenquant

Wir starten wieder mit der Erhaltung des Viererimpulses:

$$P + Q = R + S \quad (25.1)$$

quadriert:

$$P \circ P + 2 \cdot P \circ Q + Q \circ Q = R \circ R + 2 \cdot R \circ S + S \circ S$$

Wir berechnen die 6 Skalarprodukte: $P \circ P = m_0^2 \cdot c^2$; $Q \circ Q = M^2 \cdot c^2$; $R \circ R = (M + m_0)^2 \cdot c^2$; $S \circ S = 0$; $P \circ Q = \gamma_v \cdot m_0 \cdot M \cdot c^2$; $R \circ S = \gamma_u \cdot (M + m_0) \cdot \frac{h \cdot f}{c} \cdot (c - u_y)$.

Somit $m_0^2 \cdot c^2 + 2 \cdot \gamma_v \cdot m_0 \cdot M \cdot c^2 + M^2 \cdot c^2 = (M^2 + 2 \cdot M \cdot m_0 + m_0^2) \cdot c^2 + 2 \cdot \gamma_u \cdot (M + m_0) \cdot \frac{h \cdot f}{c} \cdot (c - u_y)$

vereinfacht $2 \cdot \gamma_v \cdot m_0 \cdot M \cdot c^2 = 2 \cdot M \cdot m_0 \cdot c^2 + 2 \cdot \gamma_u \cdot (M + m_0) \cdot h \cdot f \cdot \left(1 - \frac{u_y}{c}\right)$

weiter $(\gamma_v - 1) \cdot m_0 \cdot M \cdot c^2 = \gamma_u \cdot (M + m_0) \cdot h \cdot f \cdot \left(1 - \frac{u_y}{c}\right)$

und $(\gamma_v - 1) \cdot m_0 \cdot c^2 \cdot \frac{M}{\gamma_u \cdot (M + m_0)} \cdot \frac{c}{c - u_y} = h \cdot f \quad (25.2)$

Für Molybdän als Anodenmaterial gilt zum Beispiel $\frac{M}{M + m_0} \approx \frac{175000}{175001}$. Der Faktor $\frac{M}{M + m_0}$ ist daher nur wenig kleiner als 1.

Es ist zudem auch $u_y < u \ll c$, γ_u und der Faktor $c/(c - u_y)$ sind daher beide nur ganz wenig grösser als 1. Je weniger Energie das Atom aufnimmt, desto näher liegen diese beiden Faktoren bei 1. Als Obergrenze für die Energie des Röntgenquants erhalten wir somit

$$h \cdot f \leq (\gamma_v - 1) \cdot m_0 \cdot c^2 = E_{kin} \quad (25.3)$$

Das hätten wir natürlich auch gleich sagen können: Der Röntgenquant kriegt maximal die ganze kinetische Energie des Elektrons! Es gilt also

$$h \cdot f_{max} = E_{kin} = U \cdot e$$

In der Kristallstrukturbestimmung arbeitet man mit Beschleunigungsspannungen von 20 bis 40 Kilovolt, was zu Wellenlängen im Bereich von einem ganzen bis zu einem halben Angström führt.

C26 Die Lorentzkraft als Vierervektor

Maxwells Theorie des Elektromagnetismus ist ja uneingeschränkt kompatibel mit der SRT. Daher darf man auch erwarten, dass das Kraftgesetz von Lorentz weiterhin gilt: $\vec{f} = q \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$. Dieses Kraftgesetz ist ja eigentlich eine Definition für die Feldvektoren des elektrischen und des magnetischen Feldes: Die gesamte Kraftwirkung auf ein geladenes Teilchen setzt sich zusammen aus der Coulombkraft und der Lorentzkraft.

Für die entsprechende Viererkraft gilt damit

$$K = \gamma \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{dE_{tot}}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{u}, \vec{f} \right) = \gamma \cdot q \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \vec{E} \cdot \vec{u}, \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right) \quad (26.1)$$

Das Magnetfeld trägt nichts dazu bei, die Energie des geladenen Teilchens zu verändern: Da $\vec{u} \times \vec{B}$ immer senkrecht steht auf \vec{u} gilt $\vec{f} \cdot \vec{u} = q \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{u}$.

K kann als Produkt einer Matrix mit dem Vierervektor U geschrieben werden:

$$K = \frac{q}{c} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & c \cdot B_z & -c \cdot B_y \\ E_y & -c \cdot B_z & 0 & c \cdot B_x \\ E_z & c \cdot B_y & -c \cdot B_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (26.2)$$

Diese Matrix erhält die Bezeichnung F (wie Faraday), sie beschreibt in der SRT das elektromagnetische Feld. Das Kraftgesetz von Lorentz schreibt sich damit als

$$K = \frac{q}{c} \cdot F \cdot U \quad (26.3)$$

K und U sind Vierervektoren. In einem anderen Bezugssystem S' haben sie eine andere Gestalt. Diese ist nach der Definition im Abschnitt A1 gegeben durch $K' = L \cdot K$ und $U' = L \cdot U$. Es ist nun nicht schwierig, die Matrix F' zu bestimmen, für die gilt

$$K' = \frac{q}{c} \cdot F' \cdot U'$$

Multiplizieren wir (26.3) von links mit unserer Matrix L von (1.3) erhalten wir

$$L \cdot K = \frac{q}{c} \cdot L \cdot F \cdot U = \frac{q}{c} \cdot L \cdot F \cdot L^{-1} \cdot L \cdot U$$

und somit

$$K' = L \cdot K = \frac{q}{c} \cdot (L \cdot F \cdot L^{-1}) \cdot (L \cdot U) = \frac{q}{c} \cdot F' \cdot U'$$

für die Matrix F' mit $F' = L \cdot F \cdot L^{-1}$. (26.4)

Beschreibt also die Matrix F das elektromagnetische Feld in einem Bezugssystem System S , dann beschreibt die Matrix $F' = L \cdot F \cdot L^{-1}$ dasselbe elektromagnetische Feld in einem Bezugssystem S' , welches sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S in der positiven x-Richtung bewegt. Wir werden die Transformation der einzelnen Komponenten von F im nächsten Abschnitt untersuchen.

C27 Die Transformation des elektromagnetischen Feldes

Entsprechend der Gleichung (26.4) brauchen wir zur Berechnung von F' nichts anderes zu tun als das Produkt $L \cdot F \cdot L^{-1}$ der Matrizen L und F zu berechnen. Für

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & c \cdot B_z & -c \cdot B_y \\ E_y & -c \cdot B_z & 0 & c \cdot B_x \\ E_z & c \cdot B_y & -c \cdot B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \beta & 0 & 0 \\ -\gamma \cdot \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man nach braver Rechnung

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & E_x & \gamma_v \cdot (E_y - v \cdot B_z) & \gamma_v \cdot (E_z + v \cdot B_y) \\ E_x & 0 & c \cdot \gamma_v \cdot (B_z - \frac{v}{c^2} \cdot E_y) & -c \cdot \gamma_v \cdot (B_y - \frac{v}{c^2} \cdot E_z) \\ \gamma_v \cdot (E_y - v \cdot B_z) & -c \cdot \gamma_v \cdot (B_z - \frac{v}{c^2} \cdot E_y) & 0 & c \cdot B_x \\ \gamma_v \cdot (E_z + v \cdot B_y) & c \cdot \gamma_v \cdot (B_y - \frac{v}{c^2} \cdot E_z) & -c \cdot B_x & 0 \end{pmatrix}$$

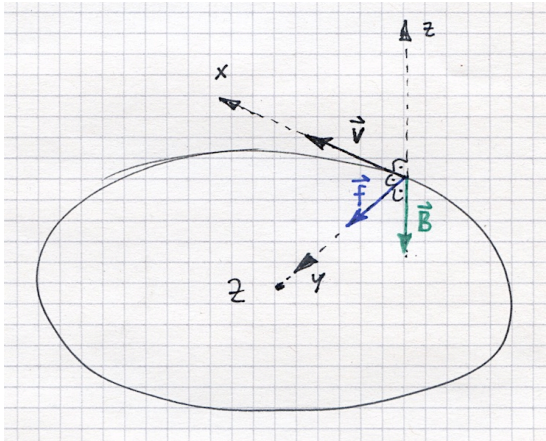
Es gilt also

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x & B_x' &= B_x \\ E_y' &= \gamma_v \cdot (E_y - v \cdot B_z) & B_y' &= \gamma_v \cdot \left(B_y + \frac{v}{c^2} \cdot E_z \right) \\ E_z' &= \gamma_v \cdot (E_z + v \cdot B_y) & B_z' &= \gamma_v \cdot \left(B_z - \frac{v}{c^2} \cdot E_y \right) \end{aligned} \quad (27.1)$$

Für die Transformation in die andere Richtung ist v durch $-v$ und somit L durch L^{-1} zu ersetzen. In den Beziehungen von (27.1) vertauschen dadurch in der zweiten und dritten Zeile die Pluszeichen und die Minuszeichen ihre Plätze.

Die SRT vereinigt also das elektrische und das magnetische Feld zu einem einzigen elektromagnetischen Feld. Damit konnte Einstein die 'Asymmetrien' beheben, die er im ersten Satz seiner "Elektrodynamik bewegter Körper" von 1905 beklagt: "Dass die Elektrodynamik Maxwells - wie dieselbe gegenwärtig aufgefasst zu werden pflegt - zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt."

C28 Kraft und Beschleunigung im Speicherring



Im Laborsystem S kreist ein Teilchen mit positiver Ladung q in einem Speicherring. Das elektromagnetische Feld weist einzig eine Komponente $B_z = -B$ auf. Die erforderliche Zentripetalkraft ist durch die Lorentzkraft gegeben:

$$\vec{f} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot (0, v \cdot B, 0)$$

Da die Kraft und die Beschleunigung senkrecht stehen auf \vec{v} gilt nach (7.7)

$$\vec{f} = \gamma_v \cdot m_0 \cdot \vec{a}$$

$$\text{und daraus} \quad \vec{a} = (0, a_y, 0) \quad \text{mit} \quad a_y = \frac{q \cdot v \cdot B}{\gamma_v \cdot m_0} \quad (28.1)$$

$$\text{Mit } a_y = \frac{v^2}{r} \quad \text{ergibt sich noch} \quad B = \frac{\gamma_v \cdot v \cdot m_0}{q \cdot r} = \frac{p}{q \cdot r} \quad (28.2)$$

Im CERN bei Genf kreisen Protonen mit einer Geschwindigkeit von bis zu 299'780'455 m/s in einem Kreis herum, dessen Radius 4243 m beträgt (die Lichtgeschwindigkeit c beträgt 299'792'458 m/s). Damit ist $\gamma_v \approx 111.75$. Die benötigte Feldstärke B ist also etwa 112 mal so gross wie nach der nicht-relativistischen Rechnung! Statt einigen Milliteslas werden Feldstärken von bis zu 8.3 Tesla erzeugt, wozu supraleitende Magnete erforderlich sind.

Wir berechnen a_y im Laborsystem noch einmal, aber diesmal mit dem Formalismus der Vierervektoren. Es gilt mit (7.5)

$$K = \frac{q}{c} \cdot F \cdot U = \gamma_v \cdot \frac{q}{c} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \cdot B & 0 \\ 0 & c \cdot B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_v \cdot \frac{q}{c} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \cdot c \cdot B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_v \cdot v \cdot q \cdot B \\ 0 \end{pmatrix} = m_0 \cdot \gamma_v^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

und wir erhalten ebenfalls (28.1).

Nun betrachten wir die Situation im Eigensystem S' des geladenen Teilchens. Es hat dort die Eigengeschwindigkeit $U' = (c, \vec{u}) = (c, 0, 0, 0)$ und, nach (10.8), die Eigenbeschleunigung $A' = \gamma_v^2 \cdot (0, a_x, a_y, a_z)$. Wir berechnen diese Eigenbeschleunigung nochmals mit $A' = L \cdot A$:

$$A' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \beta & 0 & 0 \\ -\gamma \cdot \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_v^2 \cdot a_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_v^2 \cdot a_y \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_u^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a_x' \\ a_y' \\ a_z' \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a_x' \\ a_y' \\ a_z' \end{pmatrix}$$

$$\text{Daraus erhalten wir} \quad A' = A \quad \text{und} \quad \vec{a}' = \gamma_v^2 \cdot \vec{a} = (0, \frac{\gamma_v \cdot q \cdot v \cdot B}{m_0}, 0) \quad (28.3)$$

$$\text{Mit } K' = m_0 \cdot A' = m_0 \cdot A = K \quad \text{und (7.7) folgt} \quad \vec{f}' = m_0 \cdot \gamma_u \cdot \vec{a}' = m_0 \cdot 1 \cdot \vec{a}' = m_0 \cdot \gamma_v^2 \cdot \vec{a} = \gamma_v \cdot \vec{f} \quad (28.4)$$

Wir rechnen das noch ein zweites Mal durch im Eigensystem S' des Teilchens, benützen aber diesmal die Transformationsformeln für das elektromagnetische Feld. Nach (27.1) haben wir

$$E_x' = E_x = 0$$

$$B_x' = B_x = 0$$

$$E_y' = \gamma_v \cdot (E_y - v \cdot B_z) = \gamma_v \cdot v \cdot B$$

$$B_y' = \gamma_v \cdot \left(B_y + \frac{v}{c^2} \cdot E_z \right) = 0$$

$$E_z' = \gamma_v \cdot (E_z + v \cdot B_y) = 0$$

$$B_z' = \gamma_v \cdot \left(B_z - \frac{v}{c^2} \cdot E_y \right) = -\gamma_v \cdot B$$

Daraus $\vec{f}' = q \cdot (\vec{E}' + \vec{u} \times \vec{B}') = q \cdot (\vec{E}' + \vec{0} \times \vec{B}') = q \cdot (0, \gamma_v \cdot v \cdot B, 0) = m_0 \cdot \gamma_u \cdot \vec{a}' = m_0 \cdot 1 \cdot \vec{a}'$

und somit wieder $\vec{a}' = \frac{\gamma_v \cdot v \cdot B}{m_0} = \gamma_v^2 \cdot \vec{a} \quad (28.3) = (28.5)$

Wegen $\vec{f}' = m_0 \cdot \vec{a}' = m_0 \cdot \gamma_v^2 \cdot \vec{a} = \gamma_v \cdot (\gamma_v \cdot m_0 \cdot \vec{a}) = \gamma_v \cdot \vec{f}$ gilt also *bei einer Zentripetalkraft* im Eigensystem des Teilchens

$$\vec{a}' = \gamma_v^2 \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{f}' = \gamma_v \cdot \vec{f} \quad (28.6)$$

Das können wir noch begründen:

$$f_y' = \frac{d}{dt'}(p_y') = \frac{d}{d\tau}(p_y) = \frac{d}{dt}(p_y) \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma_v \cdot \frac{d}{dt}(p_y) = \gamma_v \cdot f_y$$

Und, ganz ähnlich:

$$a_y' = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dy'}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\gamma_v \cdot \frac{dy}{dt} \right) = \gamma_v \cdot \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \gamma_v \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma_v^2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \gamma_v^2 \cdot a_y$$

γ_v ist ja, wenn die Kraft senkrecht steht auf der Geschwindigkeit, ein konstanter Faktor und kann deshalb bei der Differentiation ausgeklammert werden. Auch die Gleichung $p_y' = p_y$ lässt sich nicht auf die x-Richtung übertragen. Das gilt also alles nur für Kräfte, die senkrecht stehen auf der Bewegungsrichtung.

Den anderen Spezialfall, wo \vec{f} und \vec{v} parallel sind, behandeln wir im nächsten Abschnitt.

C29 Kraft und Beschleunigung beim Linearbeschleuniger

Ein Teilchen der Ruhemasse m_0 und der Ladung q werde längs der x-Richtung im Laborsystem S durch ein konstantes elektrisches Feld $\vec{E} = E_x$ beschleunigt. Das angelegte magnetische Feld sei null.

Es ist nach (7.6)

$$\vec{f} = q \cdot \vec{E} = q \cdot \vec{E}_x = \vec{f}_x = m_0 \cdot \gamma^3 \cdot \vec{a}_x$$

somit

$$\frac{q \cdot E_x}{m_0} = \gamma^3 \cdot a_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dv}{dt}$$

und

$$\frac{q \cdot E_x}{m_0} \cdot dt = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot dv \quad (29.1)$$

Wir integrieren beidseits (Bronstein-Integral Nr. 178) und erhalten

$$\frac{q \cdot E_x}{m_0} \cdot t + C = v \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (29.2)$$

Die Konstante C ist null falls die Anfangsgeschwindigkeit null ist. Lösen wir für diesen Fall (29.2) nach v auf erhalten wir

$$v(t) = \frac{\frac{q \cdot E_x}{m_0} \cdot t}{\sqrt{1 + \left(\frac{q \cdot E_x}{m_0 \cdot c}\right)^2 \cdot t^2}} \quad (29.3)$$

Am Anfang nimmt die Geschwindigkeit wie in der klassischen Physik linear zu. Der Nenner drosselt die Zunahme aber immer mehr, und für $t \rightarrow \infty$ erreicht die Geschwindigkeit den Grenzwert c . Um das zu zeigen erweitern wir (29.3) mit c/t :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c \cdot \frac{q \cdot E_x}{m_0}}{\sqrt{\frac{c^2}{t^2} + \left(\frac{q \cdot E_x}{m_0}\right)^2}} = \frac{c \cdot \frac{q \cdot E_x}{m_0}}{\sqrt{\left(\frac{q \cdot E_x}{m_0}\right)^2}} = c \quad (29.4)$$

Und wie sieht der Vorgang im Eigensystem S' des beschleunigten Teilchens aus? In jedem Moment gilt dort $E_x' = E_x$, $E_y' = 0$, $E_z' = 0$, $B_x' = B_x = 0$, $B_y' = 0$ und $B_z' = 0$. Wir haben also in jedem Moment dieselbe Situation wie im Laborsystem S, die Gleichungen (29.1) und (29.2) gelten auch in S'. Wir können diese Gleichungen dort aber nicht auswerten, da S' ja gar kein Inertialsystem ist!

Wir studieren die Situation nochmals im Laborsystem S unter Verwendung von Vierervektoren.

Es ist $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, $\vec{B} = 0$ und $\vec{v} = \vec{v}(t) = (v(t), 0, 0)$. Die drei Vektoren \vec{f} , \vec{v} und \vec{a} sind parallel. Weiter ist $\vec{f} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot (E_x, 0, 0)$ und $\vec{f} \cdot \vec{v} = q \cdot v \cdot E_x$. Damit können wir mit (7.5) die Gleichung für die Viererkraft aufstellen:

$$K = \gamma \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \cdot \vec{f} \cdot \vec{v} \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot \frac{1}{c} \cdot q \cdot v \cdot E_x \\ \gamma \cdot q \cdot E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_0 \cdot A = m_0 \cdot \begin{pmatrix} \gamma^4 \cdot \frac{1}{c} \cdot v \cdot a_x \\ \gamma^4 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot v^2 \cdot a_x + \gamma^2 \cdot a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29.5)$$

(29.5) liefert uns zwei Gleichungen, eine für die zeitliche Komponente und eine für die erste räumliche Komponente. Die Gleichung für die zeitliche Komponente lautet gekürzt

$$q \cdot E_x = m_0 \cdot \gamma^3 \cdot a_x$$

und wir sind wieder bei (29.1) und (7.6). Die Gleichung für die x-Komponente liefert gekürzt

$$f_x = q \cdot E_x = m_0 \cdot \gamma^3 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot v^2 \cdot a_x + \gamma \cdot a_x = m_0 \cdot \gamma^3 \cdot a_x \cdot \left(\frac{v^2}{c^2} + \gamma^{-2} \right)$$

Die linken Seiten der beiden Gleichungen sind identisch, der Faktor $\left(\frac{v^2}{c^2} + \gamma^{-2} \right)$ muss demnach 1 sein :

$$\frac{v^2}{c^2} + \gamma^{-2} = \frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1$$

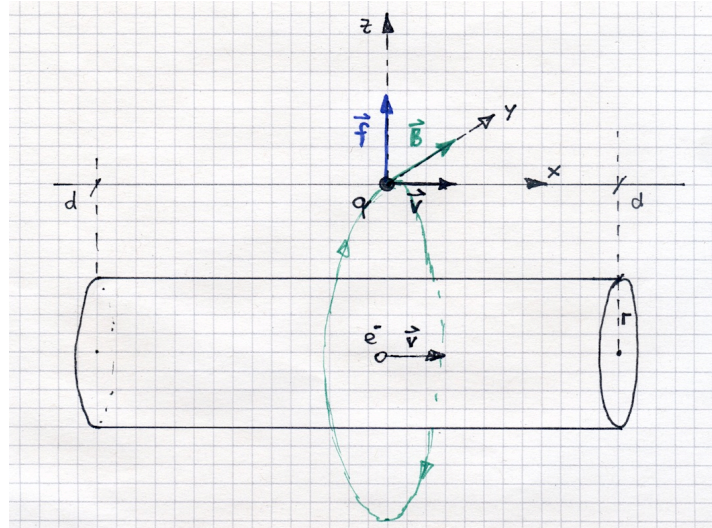
Wir erhalten also zweimal dieselbe Gleichung für die Beschleunigung a_x .

C30 Der stromführende Leiter 1

In einem langen, geraden, zylindrischen Draht soll ein Strom I fließen. Der Draht ruhe im Laborsystem S , sein Querschnitt habe den Radius r und die mittlere Driftgeschwindigkeit der Elektronen sei v . Ist n die Zahl der Leitungselektronen pro Volumeneinheit, so gilt für die Stromstärke im Draht

$$I = n \cdot e \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \quad (30.1)$$

Im Äusseren des Drahtes wirkt auf eine ruhende Probeladung keine elektrische Kraft, es gibt kein elektrisches Feld. Der stromführende Leiter ist aber von ringförmigen Feldlinien eines Magnetfeldes umgeben :



Der Strom fliesst von rechts nach links, die Elektronen driften also mit v von links nach rechts. Die Symmetrie des Magnetfeldes entspricht der Symmetrie des stromdurchflossenen Leiters.

Das Gesetz von Ampère liefert für die magnetische Feldstärke im Abstand d von der Drahtmitte den Term

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{d} \cdot n \cdot e \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \quad (30.2)$$

Damit gilt für das geladene Teilchen im Abstand d von der Drahtmitte, welches sich ebenfalls mit der Driftgeschwindigkeit v der Elektronen in der x-Richtung bewegt

$$\vec{f} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = f_z = q \cdot v_x \cdot B_y = q \cdot v \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{d} \cdot n \cdot e \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{1}{d} \cdot q \cdot n \cdot e \cdot r^2 \cdot v^2 \quad (30.3)$$

Nun wechseln wir ins Eigensystem S' des geladenen Teilchens. Im System S' hat das Teilchen die Geschwindigkeit null, ein eventuell vorhandenes Magnetfeld kann daher keine Kraftwirkung ausüben. Wenn das Teilchen in die z-Richtung vom Draht weggetrieben wird, muss der Draht einen positiven Ladungsüberschuss aufweisen und damit ein elektrisches Feld erzeugen. Dem ist tatsächlich so, den Grund dafür finden wir in der Lorentz-Kontraktion. Das Erstaunliche dabei ist, dass diese sich schon bei den Driftgeschwindigkeiten in der Grössenordnung von 1 Millimeter pro Sekunde bemerkbar macht !

Wenn der Draht im System S kein elektrisches Feld besitzt und insgesamt ungeladen ist, dann haben die driftenden Elektronen dieselbe Ladungsdichte wie die ruhenden Gitteratome: $\rho_+ + \rho_- = n \cdot e + n \cdot (-e) = 0$. Im System S' ist der Abstand der Elektronen nicht mehr lorentzverkürzt, dafür aber derjenige der Gitteratome. Deshalb gilt dort

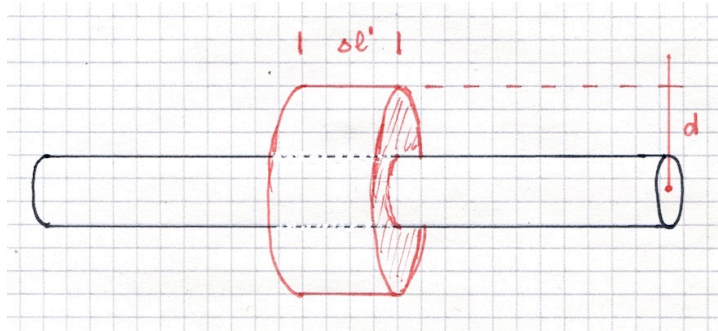
$$\rho' = \rho_+' + \rho_-' = n \cdot e \cdot \gamma_v + n \cdot (-e) \cdot \frac{1}{\gamma_v} = n \cdot e \cdot \left(\gamma_v - \frac{1}{\gamma_v} \right) = n \cdot e \cdot \gamma_v \cdot \beta_v^2 \quad (30.4)$$

Dieser positive Ladungsüberschuss pro Volumeneinheit erzeugt das elektrische Feld und damit die Kraft, welche auf unser geladenes Teilchen wirkt.

Die Stärke des elektrischen Feldes im Abstand $d = d'$ von der Drahtachse berechnet man mit dem Satz von Gauss:

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int \rho' \cdot dV'$$

Die Integration erfolgt links über die *Oberfläche* eines beliebig gewählten geschlossenen Raumgebietes, rechts über das *Volumen* von diesem Raumgebiet. Wir wählen dafür einen zum Draht koaxialen Zylinder mit dem Radius d und der beliebigen Länge $\Delta l'$:



Aus Symmetriegründen kann das E-Feld nur radial vom Draht weg zeigen, die Ladungsdichte zeichnet ja (im Gegensatz zum Strom im System S) die positive x-Richtung nicht mehr aus. Die beiden Kreisflächen können daher nichts beitragen zum linken Integral, weil dort der Flächenvektor senkrecht steht auf dem Feldvektor. Auf dem umlaufenden Zylindermantel steht \vec{E}' überall senkrecht und hat auch überall denselben Betrag. Das linke Integral ergibt somit

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{A} = E' \cdot 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \Delta l'$$

Beim rechten Integral trägt nur das Gebiet im Drahtinnern etwas bei, weil die Ladungsdichte ausserhalb null ist. Die Ladungsdichte im Innern ist durch (30.4) gegeben. Somit gilt

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int \rho' \cdot dV' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho' \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \Delta l' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \Delta l' \cdot n \cdot e \cdot \gamma_v \cdot \beta_v^2$$

Wir haben also

$$E' \cdot 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \Delta l' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \Delta l' \cdot n \cdot e \cdot \gamma_v \cdot \beta_v^2$$

und vereinfacht

$$E' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2 \cdot d} r^2 \cdot n \cdot e \cdot \gamma_v \cdot \beta_v^2 \quad (30.5)$$

Im System S' wirkt damit auf unser geladenes Teilchen im Abstand d von der Drahtachse die Coulomb-Kraft

$$\vec{f}' = q \cdot \vec{E}' = f_z' = q \cdot E' = q \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2 \cdot d} r^2 \cdot n \cdot e \cdot \gamma_v \cdot \beta_v^2$$

Mit $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \cdot \mu_0)$ und $\beta_v^2 = v^2/c^2$ lässt sich das noch vereinfachen zu

$$f' = q \cdot E' = q \cdot \mu_0 \cdot \frac{1}{2 \cdot d} r^2 \cdot n \cdot e \cdot \gamma_v \cdot v^2 \quad (30.6)$$

Ein Vergleich mit (30.3) zeigt dass gilt $f' = \gamma_v \cdot f$. Der Grund für das Auftauchen des Faktors γ_v ist derselbe wie bei (28.6).

Die Darstellung in diesem Abschnitt folgt über weite Strecken derjenigen in [2 - 5].

C31 Der stromführende Leiter 2

Wir betrachten dieselbe Situation wie im vorangehenden Abschnitt. Eine positive Probeladung q bewegt sich parallel zu einem stromführenden langen geraden Draht mit derselben Geschwindigkeit, mit der sich die Leitungselektronen im Draht bewegen. Man beachte dazu die erste Zeichnung in C30.

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass im Laborsystem S des ruhenden Drahtes eine Lorentzkraft auf das Teilchen wirkt. Nach (30.3) gilt

$$\vec{f} = f_z = q \cdot v \cdot B_y = q \cdot v \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{d} \quad (31.1)$$

Wir berechnen nun noch einmal, welche Kraft \vec{f}' im Eigensystem S' der Probeladung auf diese wirkt, diesmal aber unter Verwendung der Transformationsgleichungen für das elektromagnetische Feld.

Im System S gilt $\vec{E} = 0$ und, am Ort des Teilchens, $\vec{B} = B_y = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{d}$. Daraus erhalten wir mit (27.1)

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x = 0 & B_x' &= B_x = 0 \\ E_y' &= \gamma_v \cdot (E_y - v \cdot B_z) = 0 & B_y' &= \gamma_v \cdot \left(B_y + \frac{v}{c^2} \cdot E_z \right) = \gamma_v \cdot B_y \\ E_z' &= \gamma_v \cdot (E_z + v \cdot B_y) = \gamma_v \cdot v \cdot B_y & B_z' &= \gamma_v \cdot \left(B_z - \frac{v}{c^2} \cdot E_y \right) = 0 \end{aligned}$$

Damit bestimmt sich die wirkende Kraft durch

$$\vec{f}' = q \cdot (\vec{E}' + \vec{u} \times \vec{B}') = q \cdot (\vec{E}' + \vec{0} \times \vec{B}') = q \cdot E_z' = \gamma_v \cdot q \cdot v \cdot B_y$$

Für diese Coulombkraft gilt somit

$$\vec{f}' = f_z' = \gamma_v \cdot q \cdot v \cdot B_y = \gamma_v \cdot \vec{f} \quad (31.2)$$

Praktisch mühelos konnten wir das Ergebnis des letzten Abschnitts verifizieren.

Es ist also $f' = \gamma_v \cdot q \cdot v \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{d}$ und $f = q \cdot v \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{d}$. Dabei ist I die Stromstärke, welche in S gemessen wird.

Welche Stromstärke wird eigentlich im System S' gemessen? Die Stromstärke ist definiert als Ladungsmenge, welche pro Zeiteinheit durch eine gedachte Querschnittsfläche fließt. Die Umrechnung ist für die Richtungen senkrecht zur Relativgeschwindigkeit v einfach:

$$I_y' = dQ'/dt' = \rho' \cdot A' \cdot u_y' = \gamma_v \cdot \rho \cdot \frac{1}{\gamma_v} \cdot A \cdot \gamma_v \cdot u_y = \gamma_v \cdot \rho \cdot A \cdot u_y = \gamma_v \cdot I_y \quad (31.3)$$

Dabei ist u_y die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in der y-Richtung. Die Transformation dieser Driftgeschwindigkeit ist für die x-Richtung im Allgemeinen kompliziert. Bei uns ist in S' die Driftgeschwindigkeit u_x' der Ladungsträger gerade $-v$ und wir haben nach (30.4) und (30.1) in diesem Spezialfall ebenfalls

$$I_x' = \rho' \cdot A' \cdot u_x' = \rho' \cdot A' \cdot (-v) = \gamma_v \cdot n \cdot e \cdot \gamma_v \cdot \beta_v^2 \cdot A \cdot (-v) = \gamma_v \cdot (-\rho) \cdot A \cdot (-v) = \gamma_v \cdot I_x \quad (31.4)$$

Damit gilt in unserer speziellen Situation

$$f' = q \cdot v \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I'}{d'} \quad \text{und} \quad f = q \cdot v \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{d} \quad \text{mit} \quad d' = d, \quad I' = \gamma_v \cdot I \quad \text{und} \quad B_y' = \gamma_v \cdot B_y \quad (31.5)$$

C32 Der stromführende Leiter 3

Wir sind wieder in der Situation von C30. Diesmal soll die wirkende Kraft in S' mithilfe des Viererstroms J bestimmt werden.

Da der stromführende Draht insgesamt ungeladen ist, also kein E-Feld zeigt im Äusseren, ist die Ladungsdichte der driftenden Leitungselektronen betragsmässig gleich gross wie diejenige der Atome im Gitter, welche diese Leitungselektronen abgegeben haben. Wir nennen diese Ladungsdichten ρ und $-\rho$. Der gesamte Viererstrom J im System S des ruhenden Drahtes setzt sich zusammen aus dem Viererstrom J_- der Leitungselektronen und dem Viererstrom J_+ der Gitteratome:

$$J_{tot} = J_+ + J_- = \rho \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\rho) \cdot \begin{pmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \cdot v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{tot} \cdot c \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

Die Driftgeschwindigkeit der Elektronen soll ja gleich sein wie die Relativgeschwindigkeit von S' gegenüber S. Zu J_{tot} gehört die Stromstärke

$$I = I_x = j_x \cdot A_x = -\rho \cdot v \cdot r^2 \cdot \pi \quad (32.1)$$

Es gilt

$$J_+ = \rho \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_{0+} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_{0+} \cdot \gamma_u \cdot \begin{pmatrix} c \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \rho_{0+} \cdot U_+ \quad \text{mit} \quad J_+ \circ J_+ = \rho_{0+}^2 \cdot c^2$$

und

$$J_- = -\rho \cdot \begin{pmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_{0-} \cdot \gamma_v \cdot \begin{pmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_{0-} \cdot \gamma_v \cdot \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = -\rho_{0-} \cdot U_- \quad \text{mit} \quad J_- \circ J_- = \rho_{0-}^2 \cdot c^2$$

ρ_{0+} und ρ_{0-} sind die Ladungsdichten der positiven und der negativen Ladungsträger gemessen in ihrem Eigensystem.

Wir bestimmen nun J' , J'_+ und J'_- im System S', indem wir die Viererströme in S von links mit der Lorentz-Matrix L multiplizieren. Wir erhalten

$$J'_+ = L \cdot J_+ = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \beta & 0 & 0 \\ -\gamma \cdot \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \rho \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J'_- = L \cdot J_- = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \beta & 0 & 0 \\ -\gamma \cdot \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-\rho) \cdot \begin{pmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} c - \beta \cdot v \\ -\beta \cdot c + v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} c - \beta \cdot v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$J' = J'_+ + J'_- = \rho \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} c \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \rho \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} c - \beta \cdot v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \cdot \gamma \cdot \begin{pmatrix} \beta \cdot v \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot \rho'_{tot} \\ j'_x \\ j'_y \\ j'_z \end{pmatrix}$$

Die Stromdichte der in S driftenden Elektronen ist in S' erwartungsgemäss null geworden, während die Gitteratome ohne ihre Leitungselektronen einen elektrischen Strom in die negative x-Richtung bilden. Dieser Strom hat die Stärke

$$I' = I'_x = j'_x \cdot A'_x = \rho \cdot \gamma \cdot (-v) \cdot r^2 \cdot \pi = \gamma \cdot I \quad (32.2)$$

Dieser Strom I' erzeugt im Abstand $d' = d$ nach dem Gesetz von Ampère die magnetische Feldstärke

$$B_{y'} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I'}{d'} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\gamma \cdot I}{d} = \gamma \cdot \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{d} = \gamma \cdot B_y \quad (32.3)$$

Dieses Magnetfeld übt aber keine Kraft aus auf unser geladenes Teilchen, da es ja in S' ruht.

Die gesamte Ladungsdichte des Drahtes ist jetzt nicht mehr null, sondern

$$\rho'_{tot} = \rho \cdot \gamma \cdot \beta \cdot v \cdot \frac{1}{c} = \rho \cdot \gamma \cdot \beta^2 \quad (32.4)$$

Diese Ladungsdichte erzeugt nach dem Satz von Gauss im Abstand $d' = d$ eine elektrische Feldstärke E' , für die nach C30 gilt

$$E' \cdot 2 \cdot \pi \cdot d' \cdot \Delta l' = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho'_{tot} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \Delta l'$$

Also

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{d'} \cdot \rho'_{tot} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{d'} \cdot \rho \cdot \gamma \cdot \beta^2 \cdot r^2 \cdot \pi = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{d'} \cdot \beta^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot I' = \\ &= -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{d'} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{1}{v} \cdot I' = -\frac{\mu_0 \cdot \epsilon_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{d'} \cdot v \cdot I' = -\frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I'}{d'} \cdot v = B_{y'} \cdot v = \gamma \cdot B_y \cdot v \end{aligned} \quad (32.5)$$

Für die Coulombkraft auf das geladene Teilchen in S' erhalten wir wie in (31.2)

$$\vec{f}' = f_z' = q \cdot E' = q \cdot \gamma_v \cdot q \cdot v \cdot B_y = \gamma_v \cdot \vec{f} \quad (32.6)$$

Den Viererstrom $J = (0, -\rho \cdot v, 0, 0)^T$ hätten wir gleich hinschreiben können. L hätte daraus sofort den Viererstrom J' und damit die Stromstärke und die Ladungsdichte im System S' geliefert:

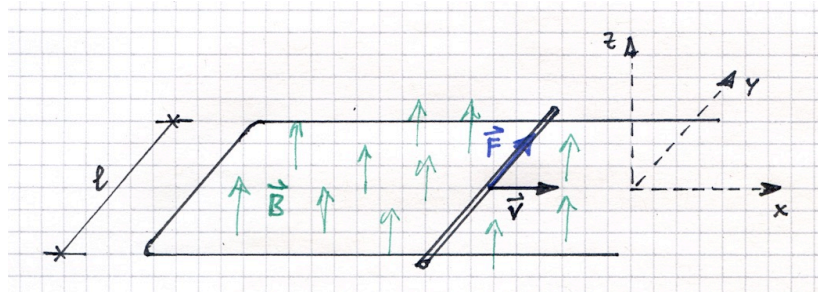
$$J' = L \cdot J = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \beta & 0 & 0 \\ -\gamma \cdot \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \cdot v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot v \cdot \gamma \cdot \beta \\ -\rho \cdot \gamma \cdot v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot \rho'_{tot} \\ j_{x'} \\ j_{y'} \\ j_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot (\rho \cdot \gamma \cdot \beta^2) \\ -\rho \cdot \gamma \cdot v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus kann man wie gezeigt das B'-Feld und das E'-Feld des Leiters im System S' berechnen. Alle Resultate stimmen komplett überein mit denjenigen, die wir auf anderen Wegen in den Abschnitten C28 und C29 gefunden haben.

Wir haben einen gewissen Aufwand getrieben um zu zeigen, dass der Viererstrom im allgemeinen *nicht* in der Form $J = \rho_0 \cdot U$ geschrieben werden kann. Nur in dieser speziellen Form ist offensichtlich, dass J ein Vierervektor ist. Die gesamte Ladungsdichte ist aber oft verschieden von der Dichte der strömenden Ladungen, und dann ist diese Schreibweise nicht möglich. In unserem Beispiel liess sich der Viererstrom J immerhin aus zwei derartigen speziellen Viererströmen zusammensetzen. Und nach A2 ist die Summe zweier Vierervektoren wieder ein Vierervektor.

C33 Die Leiterschleife im Magnetfeld

Im Laborsystem S wird ein Metallstab in der x-Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. Der Metallstab ist in gutem leitenden Kontakt mit einem U-förmigen Metallbügel. Die ganze eingeschlossene Fläche wird von einem vertikalen Magnetfeld durchdrungen :



Im Laborsystem wirkt auf die Elektronen im gleitenden Stab die Lorentz-Kraft

$$\vec{f} = f_y = -e \cdot (-v \cdot B_z) = e \cdot v \cdot B_z \quad (33.1)$$

Im geschlossenen Stromkreis fliesst daher ein Strom I . Die Stärke dieses induzierten Stromes lässt sich über das Induktionsgesetz berechnen. Für den Betrag der induzierten Spannung gilt

$$U_{ind} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = B \cdot \frac{dA}{dt} = B \cdot l \cdot v$$

Die induzierte Stromstärke ist entsprechend

$$I = U_{ind} / R = B \cdot l \cdot v / R$$

wo R der Ohm'sche Widerstand des Stromkreises ist.

Im Eigensystem S' des bewegten Stabes ist die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen null. Ein Magnetfeld kann somit auf diese Elektronen keine Kraft ausüben. Allerdings liefert die Transformation des elektromagnetischen Feldes im System S' ein elektrisches Feld, welches in die y-Richtung zeigt:

$$E_x' = E_x = 0, \quad E_y' = \gamma_v \cdot (E_y - v \cdot B_z) = -\gamma_v \cdot v \cdot B_z, \quad E_z' = \gamma_v \cdot (E_z + v \cdot B_y) = 0$$

Auf die Elektronen im Metallstab wirkt somit eine Coulombkraft vom Betrag

$$\vec{f}' = f_y' = (-e) \cdot (-\gamma_v) \cdot v \cdot B_z = \gamma_v \cdot e \cdot v \cdot B_z = \gamma_v \cdot \vec{f} \quad (33.2)$$

Wie in den vorangegangenen Abschnitten gilt $\vec{f}' = \gamma_v \cdot \vec{f}$. Nach C29 ist in S' auch der induzierte Strom in der y-Richtung um den Faktor γ_v grösser:

$$I' = \gamma_v \cdot I \quad (33.3)$$

Ist auch die Induktionsspannung um diesen Faktor grösser? Die Antwort ist 'ja' :

$$|U_{ind}'| = \frac{d\Phi'}{dt'} = B_z' \cdot \frac{dA'}{dt'} = \gamma_v \cdot B_z \cdot \frac{dA/\gamma_v}{dt \cdot \gamma_v} = \gamma_v \cdot B \cdot \frac{dA/\gamma_v}{dt} \cdot \gamma_v = \gamma_v \cdot B \cdot \frac{dA}{dt} = \gamma_v \cdot |U_{ind}|$$

Für den Ohm'schen Widerstand gilt demnach $R' = R$:

$$R' = \frac{|U_{ind}'|}{I'} = \frac{\gamma_v \cdot |U_{ind}|}{\gamma_v \cdot I} = \frac{|U_{ind}|}{I} = R$$

C34 Die erste Invariante des elektromagnetischen Feldes

Bewegt sich das Bezugssystem S' mit konstanter Geschwindigkeit v in der x-Richtung des Bezugssystems S dann gilt für die Beschreibungen des elektromagnetischen Feldes in den beiden Bezugssystemen immer

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}' \quad (34.1)$$

Das Skalarprodukt $\vec{E} \cdot \vec{B}$ ist also eine relativistische Invariante. Wenn die Feldvektoren \vec{E} und \vec{B} in einem System S senkrecht stehen aufeinander dann tun sie das auch in jedem anderen Inertialsystem S'.

Der Beweis von (34.1) lässt sich leicht direkt führen über die Transformationsgleichungen (27.1), siehe dazu [2 - 34.20]. Wir machen es etwas komplizierter und führen eine Matrix M ein, welche uns auch später noch von Nutzen sein wird:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c \cdot B_x & c \cdot B_y & c \cdot B_z \\ c \cdot B_x & 0 & -E_z & E_y \\ c \cdot B_y & E_z & 0 & -E_x \\ c \cdot B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (34.2)$$

M gibt eine 'duale' Beschreibung des elektromagnetischen Feldes und ist mit unserer Matrix F eng verknüpft. Eine einfache Matrizenmultiplikation zeigt, dass gilt

$$M \cdot F = F \cdot M = c \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = c \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} \cdot Id_4 \quad (34.3)$$

Die *Spur*, also die Summe der Diagonalelemente von $M \cdot F$, ist somit $4 \cdot c \cdot \vec{E} \cdot \vec{B}$.

Wenn F das elektromagnetische Feld im System S beschreibt dann beschreibt nach (24.4) $F' = L \cdot F \cdot L^{-1}$ dasselbe elektromagnetische Feld im System S'. Man kann sich durch Nachrechnen davon überzeugen, dass auch für die Matrix M gilt $M' = L \cdot M \cdot L^{-1}$. Es ist also

$$F' = L \cdot F \cdot L^{-1} \quad \text{und} \quad M' = L \cdot M \cdot L^{-1} \quad (34.4)$$

Damit gilt

$$4 \cdot c \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} = \text{spur}(M \cdot F) = \text{spur}(L \cdot M \cdot L^{-1} \cdot L \cdot F \cdot L^{-1}) = \text{spur}(M' \cdot F') = 4 \cdot c \cdot \vec{E}' \cdot \vec{B}'$$

womit (34.1) bewiesen ist.

Für die Determinanten der Matrizen F , F' , M und M' gilt übrigens noch

$$\det(F) = \det(F') = \det(M) = \det(M') = -c^2 \cdot (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \quad (34.5)$$

Wenn ein Feld in ein reines B'-Feld transformiert werden kann gilt wegen $\vec{E}' = 0$ auch $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$. Das ist nach (34.1) nur möglich, wenn auch $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ gilt. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn ein Feld in ein reines E'-Feld transformiert werden kann.

C35 Die zweite Invariante des elektromagnetischen Feldes

Bewegt sich das Bezugssystem S' mit konstanter Geschwindigkeit v in der x-Richtung des Bezugssystems S dann gilt für die Beschreibungen des elektromagnetischen Feldes in den beiden Bezugssystemen immer

$$E^2 - c^2 \cdot B^2 = E'^2 - c^2 \cdot B'^2 \quad (35.1)$$

Dabei ist $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ und $B^2 = \vec{B} \cdot \vec{B}$ das konventionelle Skalarprodukt der 3d-Feldvektoren.

Für den Beweis von (35.1) betrachten wir die Determinanten von $F + M$ und $F - M$. Die Rechnung zeigt, dass gilt

$$\det(F + M) = \det(F - M) = -(E^2 - c^2 \cdot B^2)^2 \quad (35.2)$$

Sowieso gilt für 4x4-Matrizen $\det(F - M) = \det(M - F)$. Es gilt also sogar

$$\det(F + M) = \det(F - M) = \det(M - F) = \det(-M - F) = -(E^2 - c^2 \cdot B^2)^2 \quad (35.3)$$

Entsprechendes gilt im System S' :

$$\det(F' + M') = \det(F' - M') = \det(M' - F') = \det(-M' - F') = -(E'^2 - c^2 \cdot B'^2)^2 \quad (35.4)$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \det(F + M) &= \det(L \cdot (F + M) \cdot L^{-1}) = \det((L \cdot F + L \cdot M) \cdot L^{-1}) = \\ &= \det(L \cdot F \cdot L^{-1} + L \cdot M \cdot L^{-1}) = \det(F' + M') \end{aligned}$$

Damit ist erst bewiesen, dass gilt $(E^2 - c^2 \cdot B^2)^2 = (E'^2 - c^2 \cdot B'^2)^2$. Nach (25.1) hängen die Werte von E^2 und B^2 aber *stetig* von der Relativgeschwindigkeit v ab. Ist der Wert von $E^2 - c^2 \cdot B^2$ zum Beispiel positiv, dann bleibt er bei variierendem Wert von v immer positiv, er kann nicht plötzlich auf $-(E^2 - c^2 \cdot B^2)$ umspringen. Daher ist nicht nur das Quadrat von $E^2 - c^2 \cdot B^2$ invariant, sondern schon $E^2 - c^2 \cdot B^2$ selber. Damit ist (35.1) bewiesen.

Natürlich kann man (35.1) auch beweisen, indem man in $E'^2 - c^2 \cdot B'^2$ die entsprechenden Terme gemäss (27.1) einsetzt und zeigt, dass man schliesslich $E^2 - c^2 \cdot B^2$ erhält. Diese Rechnung wird in [2 - 34.21] vorgeführt.

Aus (35.1) kann man noch den Schluss ziehen, dass man ein reines E-Feld nie in ein reines B'-Feld umwandeln kann. Dann würde ja nach (35.1) gelten $E^2 = -c^2 \cdot B'^2$, was nur bei verschwindendem E- und B'-Feld möglich ist.

(35.1) zeigt noch, dass ein Feld nur dann in ein reines B'-Feld transformiert werden kann, wenn $E^2 - c^2 \cdot B^2 \leq 0$ gilt. Entsprechend kann ein Feld nur dann in ein reines E'-Feld transformiert werden, falls $E^2 - c^2 \cdot B^2 \geq 0$.

In beiden Fällen muss nach dem letzten Abschnitt die zusätzliche Bedingung $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ erfüllt sein.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür studieren wir im nächsten Abschnitt.

C36 Welche Felder lassen sich ganz wegtransformieren ?

Die Antwort kommt direkt aus den Gleichungen (27.1). Diese Gleichungen liefern die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die entsprechende Transformation möglich ist. Die notwendigen Bedingungen, die wir in den letzten beiden Abschnitten gefunden haben, sind dann automatisch erfüllt.

Es soll also im System S' nur noch ein B'-Feld geben, es soll also $\vec{E}' = 0$ gelten. Aus (27.1) folgt dann

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y - v \cdot B_z = 0 \quad \text{und} \quad E_z + v \cdot B_y = 0$$

also

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = v \cdot B_z \quad \text{und} \quad E_z = -v \cdot B_y \quad (36.1)$$

Das ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich das E-Feld wegtransformieren lässt.

Damit ist die notwendige Bedingung von C34, nämlich $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, bereits erfüllt:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_x \cdot B_x + E_y \cdot B_y + E_z \cdot B_z = 0 \cdot B_x + v \cdot B_z \cdot B_y + (-v \cdot B_y) \cdot B_z = v \cdot B_z \cdot B_y - v \cdot B_z \cdot B_y = 0$$

Auch die Voraussetzung aus C35 ist damit bereits erfüllt:

$$E^2 - c^2 \cdot B^2 = 0 + v^2 \cdot B_z^2 + v^2 \cdot B_y^2 - c^2 \cdot (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = -c^2 \cdot B_x^2 + (v^2 - c^2) \cdot (B_y^2 + B_z^2) \leq 0$$

Ebenso einfach ist die Antwort auf die Frage, wann es im System S' nur noch ein E'-Feld hat, also dass $\vec{B}' = 0$ gilt. Aus den Gleichungen (27.2) folgt dann

$$B_x = 0 \quad , \quad B_y + \frac{v}{c^2} \cdot E_z = 0 \quad \text{und} \quad B_z - \frac{v}{c^2} \cdot E_y = 0$$

also

$$B_x = 0 \quad , \quad B_y = -\frac{v}{c^2} \cdot E_z \quad \text{und} \quad B_z = \frac{v}{c^2} \cdot E_y \quad (36.2)$$

Damit sind auch die beiden notwendigen Bedingungen $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ und $E^2 - c^2 \cdot B^2 \geq 0$ erfüllt.

Es wird noch einmal deutlich, dass sich ein reines E-Feld oder ein reines B-Feld nicht wegtransformieren lassen.

C37 Der Nabla-Operator als Viererform

Die Gleichungen von Maxwell lassen sich mit dem Vierer-Nabla-Operator elegant schreiben, der definiert ist durch

$$N_i = \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (37.1)$$

Wir wollen nun zeigen dass gilt

$$N_i' = \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right) = N_i \cdot L^{-1} \quad (37.2)$$

Mit anderen Worten: N_i transformiert sich wie eine Viererform, also gemäss (9.6) .

Es ist

$$N_i \cdot L^{-1} = \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \cdot \beta & 0 & 0 \\ \gamma \cdot \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{c} \cdot \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \cdot \beta \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{c} \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Wir müssen nun zeigen, dass wir rechts N_i' erhalten haben.

- es ist $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$ da in unserem Setting immer $dy = dy'$ gilt
- genauso gilt auch $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$
- es sei nun f eine beliebige Funktion, die von der Variablen t' abhängt. Die Gleichungen (1.1) zeigen wie t' selber von t und x abhängt. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \gamma + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \gamma \cdot \beta \cdot c$$

Somit ist

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{c} \cdot \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \cdot \beta \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

und der Beweis ist auch für die erste Komponente von N_i' geführt.

- Genauso zeigen wir noch, dass (37.2) auch für die zweite Komponente richtig ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \frac{1}{c} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \gamma$$

Somit

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{c} \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

Das ist genau der Term den wir oben mit dem Produkt $N_i \cdot L^{-1}$ erhalten haben.

Unser Operator transformiert sich also wie eine Viererform.

C38 Die Gleichungen von Maxwell für das Vakuum

Die Gleichungen von Maxwell werden gerne mit dem 3d-Nabla-Operator $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ geschrieben. Er wird als Spaltenvektor aufgefasst, der dann mit den Feldvektoren Skalarprodukte oder Vektorprodukte bilden soll.

- $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho$ soll also heissen $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho = \mu_0 \cdot c^2 \cdot \rho$
Quellen des elektrischen Feldes sind die elektrischen Ladungen.

- $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ bedeutet ausgeschrieben

$$\left(\frac{\partial \vec{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z}, \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial x}, \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial y} \right)^T = \mu_0 \cdot \left(j_x + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t}, j_y + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial t}, j_z + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} \right)^T$$

Wirbel im B-Feld entstehen um Ströme und bei zeitlich veränderlichen E-Feldern. \vec{j} ist dabei der 3d-Strom-dichtevektor

Diese 1+3 Gleichungen können wir mit der Matrix F zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen :

$$\left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & c \cdot B_z & -c \cdot B_y \\ E_y & -c \cdot B_z & 0 & c \cdot B_x \\ E_z & c \cdot B_y & -c \cdot B_x & 0 \end{pmatrix} = c \cdot \mu_0 \cdot (c \cdot \rho, -j_x, -j_y, -j_z) \quad (38.1)$$

Mit unseren Bezeichnern können wir (38.1) sehr schlank schreiben:

$$N_i \cdot F = c \cdot \mu_0 \cdot J_i \quad (38.2)$$

Dabei ist $J_i = (c \cdot \rho, -j_x, -j_y, -j_z)$ die Viererform zum Viererstrom J^i , und wir haben zudem benutzt dass gilt $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2$.

Wir kommen nun zur zweiten Hälfte von Maxwells Gleichungen.

- $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ bedeutet $\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0$. Das magnetische Feld ist 'quellenfrei', es gibt keine magnetischen Monopole.
- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ bedeutet $\left(\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial z}, \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x}, \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial y} \right)^T = \left(-\frac{\partial \vec{B}_x}{\partial t}, -\frac{\partial \vec{B}_y}{\partial t}, -\frac{\partial \vec{B}_z}{\partial t} \right)^T$
Wirbel im elektrischen Feld werden durch zeitlich veränderliche Magnetfelder verursacht.

Diese 1+3 Gleichungen können wir mit der Matrix M zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen :

$$\left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & c \cdot B_x & c \cdot B_y & c \cdot B_z \\ c \cdot B_x & 0 & -E_z & E_y \\ c \cdot B_y & E_z & 0 & -E_x \\ c \cdot B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0) \quad (38.3)$$

oder mit unseren Bezeichnern

$$N_i \cdot M = (0, 0, 0, 0) \quad (38.4)$$

C39 Maxwells Gleichungen sind forminvariant

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die 2·(1 + 3) Gleichungen von Maxwell mit unseren Matrizen sehr konzentriert geschrieben werden können:

$$N_i \cdot F = c \cdot \mu_0 \cdot J_i$$

und

$$N_i \cdot M = 0_i$$

mit den Linearformen $J_i = (c \cdot \rho, -j_x, -j_y, -j_z)$ und $0_i = (0, 0, 0, 0)$.

Wir wissen auch von allen beteiligten Grössen, wie sie sich beim Übergang vom Bezugssystem S zu einem anderen Bezugssystem S' transformieren. Damit wird es nun sehr leicht zu zeigen, dass alle Gleichungen von Maxwell in genau derselben Form auch in S' gelten, wenn sie in S gelten:

$$\begin{aligned} N_i \cdot M &= 0_i \\ \Leftrightarrow N_i \cdot L^{-1} \cdot L \cdot M &= 0_i \\ \Leftrightarrow (N_i \cdot L^{-1}) \cdot (L \cdot M \cdot L^{-1}) &= 0_i \cdot L^{-1} \\ \Leftrightarrow N_i' \cdot M' &= 0_i \end{aligned}$$

Damit ist die Forminvarianz der zweiten vier Gleichungen bewiesen. Genau gleich machen wir es für die ersten vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} N_i \cdot F &= c \cdot \mu_0 \cdot J_i \\ \Leftrightarrow N_i \cdot L^{-1} \cdot L \cdot F &= c \cdot \mu_0 \cdot J_i \\ \Leftrightarrow (N_i \cdot L^{-1}) \cdot (L \cdot F \cdot L^{-1}) &= c \cdot \mu_0 \cdot (J_i \cdot L^{-1}) \\ \Leftrightarrow N_i' \cdot F' &= c \cdot \mu_0 \cdot J_i' \end{aligned}$$

Hier ernten wir die Früchte unserer Vorbereitungsarbeiten !

Maxwells Theorie des elektromagnetischen Feldes, die Invarianz der elektrischen Ladung, die Formulierung der Lorentz-Kraft und die Spezielle Relativitätstheorie passen bestens zusammen.

C40 Kosmetik am elektromagnetischen Feld

In den Matrizen F und M erscheinen das elektrische und das magnetische Feld etwas asymmetrisch. Das liesse sich mit einer kleinen Änderung der Definition des elektrischen Feldes beheben und hätte allerhand weitere ästhetische Vorteile :

- Das elektrische Feld sei neu definiert durch $E := E/c$
Die Definition des magnetischen Feldes wird beibehalten: $B := B$
Beide Felder haben damit dieselben Einheiten, nämlich 'Tesla'
- Das elektromagnetische Feld soll neu durch die beiden Matrizen $F := F/c$ und $M := M/c$ beschrieben werden. Damit verschwindet in den Matrizen der Faktor c , die 'Dualität' der beiden Matrizen tritt besser zutage :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Der Faktor c verschwindet auch im Kraftgesetz: $K = q \cdot F \cdot U$ statt wie bisher $K = \frac{q}{c} \cdot F \cdot U$
- Bei der zweiten Hälfte der 8 Gleichungen von Maxwell verschwindet der Faktor c :
 $N_i \cdot F = \mu_0 \cdot J_i$ statt wie bisher $N_i \cdot F = c \cdot \mu_0 \cdot J_i$
- Bei den Determinanten von F und M verschwindet ein Faktor c^2 :
 $\det(M) = \det(F) = -(\vec{E} \cdot \vec{B})^2$ statt wie bisher $\det(M) = \det(F) = -c^2 \cdot (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$
- Das Produkt der beiden Matrizen F und M wird besonders schön:
 $F \cdot M = (\vec{E} \cdot \vec{B}) \cdot Id_4$ statt wie bisher $F \cdot M = c^2 \cdot (\vec{E} \cdot \vec{B}) \cdot Id_4$
- Die zweite Invariante des elektromagnetischen Feldes erhält auch eine symmetrische Gestalt:
 $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ statt wie bisher $\vec{E}^2 - c^2 \cdot \vec{B}^2$
- Der ganze Satz von Transformationsgleichungen für das elektromagnetische Feld, also (25.1), wird neu symmetrisch in \vec{E} und \vec{B} :

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma_v \cdot (E_y - \beta \cdot B_z) & B'_y &= \gamma_v \cdot (B_y + \beta \cdot E_z) \\ E'_z &= \gamma_v \cdot (E_z + \beta \cdot B_y) & B'_z &= \gamma_v \cdot (B_z - \beta \cdot E_y) \end{aligned}$$

- Für die Dreier-Kraft \vec{f} gilt neu $\vec{f} = q \cdot (c \cdot \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$. Jetzt werden beide Feldvektoren mit einer Geschwindigkeit multipliziert.

All diese Vereinfachungen würden sich von selbst ergeben, wenn die Lichtgeschwindigkeit den einheitenlosen Wert 1 hätte. Dies könnte man zum Beispiel dadurch erreichen, dass man als Längeneinheit die Lichtsekunde verwenden würde. Zeiten und Längen würden dann in Sekunden gemessen, und die Lichtgeschwindigkeit hätte den einheitenlosen Wert '1 Lichtsekunde pro Sekunde', also ein 'Licht'.

Einen noch radikaleren Vorschlag hat schon vor langer Zeit Carl Friederich Gauss gemacht: Man solle die Einheiten für das elektrische und das magnetische Feld so festlegen, dass die Feldkonstanten ϵ_0 und μ_0 beide den Wert 1 haben. Dann hätte die Lichtgeschwindigkeit ebenfalls den Wert 1, und die Feldkonstanten würden aus den Gleichungen von Maxwell verschwinden.

Die neue Festlegung von $E := E/c$ ist der *harmloseste* Eingriff, mit dem man die gewünschte Wirkung erzielen kann.